ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2007, № 2, с. 1–9

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 681.32

ПРЕПЯТСТВИЯ К ФАКТОРИЗАЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ НА НЕСКОЛЬКО МНОЖИТЕЛЕЙ*

© **2007 г. Е. С. Шемякова, Ф. Винклер**
Исследовательский институт символьных вычислений (RISC),
Университет им. Кеплера
Линц, Австрия
E-mail: {kath, Franz.Winkler}@risc.uni-linz.ac.at
Поступила в редакцию

В работе изучается вопрос о построении алгоритмов факторизации линейных операторов в частных производных. Мы вводим несколько новых теоретических понятий – препятствие и кольцо препятствий к факторизации, которые инвариантны и обладают другими интересными свойствами.
Доказана важная для построения таких алгоритмов теорема об однозначном продолжении разложения, начиная с некоторого момента. Вычислены препятствия для степеней два и три.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы исследуем задачу факторизации линейных дифференциальных операторов с частными производными над некоторым полем. Предпосылкой стал алгоритм Григорьева-Шварца [1], который продолжает факторизацию (с взаимно простыми множителями) символа оператора до факторизации самого оператора. На первом шаге алгоритма известны только старшие компоненты множителей, затем на каждом следующем шаге мы либо находим следующую компоненту в каждом множителе, либо доказываем, что факторизации данного типа не существует. В последнем случае вся найденная информация об операторе теряется: на каждом шаге алгоритма неявно находится частичная факторизация оператора. Мы же предлагаем эту информацию использовать.

Так мы вводим понятия частичной факторизации и обычного препятствия. Последнее для операторов второго порядка совпадает с известными инвариантами Лапласа [2].

Частичные факторизации позволили получить теорему 1 об однозначном продолжении разложения оператора, начиная с некоторого момента. Теорема Григорьева-Шварца [1] получается как частный случай такой теоремы.

В общем случае ни обычное препятствие, ни его символ не единственны, не инвариантны и были рассмотрены на некоторых примерах в [3]. Мы вводим новое понятие – кольцо препятствий, которое мы определяем как фактор кольца многочленов, соответствующих кольцу линейных дифференциальных операторов, по модулю некоторого однородного идеала. Символы всех обычных препятствий принадлежат одному и тому же смежному классу в этом кольце препятствий. Этот класс мы назвали препятствием к факторизации. Одно из важнейших свойств препятствия – то, что оно инвариантно относительно операции сопряжения. Доказываем и другие интересные свойства.

Посчитаны явные формулы для препятствий операторов от двух переменных второй и третьей степеней.

Отметим, что работа уже имеет приложение – получена полная система инвариантов для ги-

*Работа выполнена при поддержке Austrian Science Foundation (FWF), проект SFB F013/F1304.

перболического оператора третьего порядка от двух переменных [4].

Данная работа является (независимым) продолжением работы [5], где мы рассматриваем факторизации на два множителя.

2. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть K – некоторое поле с определенными на нем дифференцированиями $D_1, \ldots, D_n$. Рассмотрим кольцо линейных дифференциальных операторов $K[D] = K[D_1, \ldots, D_n]$. Совокупность всех линейных дифференциальных операторов порядка $\leqslant i$, снабженная левым и правым умножением, является K-бимодулем, который будет обозначаться $K_{\leq i}$. Таким образом, мы имеем фильтрацию: $\ldots \supset K_{\leq i} \supset K_{\leq i-1} \supset \ldots \supset \supset K_{\leq 0}$. Рассмотрим присоединенную алгебру

$$Smbl_* = \sum_{i \geq 0} Smbl_i, \;\; Smbl_i = K_{\leq i} / K_{\leq i-1}.$$

K-модуль $Smbl_*$ является коммутативной K-алгеброй, изоморфной кольцу многочленов $K[X] = K[X_1, \ldots, X_n]$ от n переменных. Образ оператора $L \in K[D]$ при естественной проекции будем рассматривать как элемент кольца многочленов $K[X]$ и обозначать Sym_L. Фактически, символ оператора – это однородный многочлен, соответствующий сумме старших членов оператора.

Мы используем следующие обозначения:

$$D^{(i_1,\ldots,i_n)} := D_1^{i_1} \ldots D_n^{i_n},$$
$$|D^{(i_1,\ldots,i_n)}| = ord(D^{(i_1,\ldots,i_n)}) := i_1 + \ldots + i_n$$

и будем считать по определению, что порядок нулевого оператора равен $-\infty$. Для однородного многочлена $S \in K[X]$ определим оператор $\widehat{S} \in K[D]$, получающийся заменой переменных X_i на операторы D_i, если же смысл ясен из контекста, то мы будем обозначать и многочлен, и соответствующий оператор просто одной буквой. Через $K_i[D]$ обозначим совокупность всех операторов из $K[D]$ порядка i.

Любой оператор $L \in K[D]$ порядка d записывается в виде

$$L = \sum_{|J| \leq d} a_J X^J = \sum_{i=0}^{d} L_i, \qquad (1)$$

где $a_J \in K$, $J \in \mathbf{N}^n$ и L_i – компонента L порядка i.

3. ЧАСТИЧНЫЕ ФАКТОРИЗАЦИИ

Начнем с обобщения нескольких определений, представленных в [5] для случая двух множителей.

Определение 1. Пусть $L \in K[D]$ и $\mathrm{Sym}_L = S_1 \ldots S_k$. Мы будем говорить, что факторизация $L = F_1 \circ \ldots \circ F_k$ имеет *тип* $(S_1)(S_2)\ldots(S_k)$, если $\mathrm{Sym}_{F_i} = S_i \; \forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Определение 2. Пусть для некоторых операторов $L, F_i \in K[D]$, $i = 1, \ldots, k$, и некоторого $t \in \{0, \ldots, ord(L)\}$ выполнено

$$ord(L - F_1 \circ \ldots \circ F_k) < t. \qquad (2)$$

Тогда мы назовем $F_1 \circ \ldots \circ F_k$ *частичной факторизацией* порядка t оператора L. Если при этом $S_i = \mathrm{Sym}_{F_i}$, $i = 1, \ldots, k$ (а значит, $\mathrm{Sym}_L = S_1 \ldots S_k$), то частичная факторизация имеет тип $(S_1)\ldots(S_k)$.

Замечание 1. *Любая факторизация (в обычном смысле) $L \in K[D]$ является частичной факторизацией порядка* 0.

Замечание 2. *Пусть $L \in K[D]$, $ord(L) = d$. Тогда для любой факторизации символа $\mathrm{Sym}_L = S_1 \ldots S_k$ соответствующая композиция операторов $\widehat{S}_1 \circ \ldots \circ \widehat{S}_k$ является частичной факторизацией порядка d.*

Предположим, что $L \in K[D]$ и $F_1 \circ \ldots \circ F_k$ – его частичная факторизация порядка t. Можно заметить, что условие (2) выполняется независимо от выбора членов порядка $< t - (d - d_i)$ в множителе F_i. А значит, мы получаем новые частичные факторизации порядка, равного или меньшего t. Поэтому естественно ввести следующее определение:

Определение 3. Пусть $L \in K[D]$, $\mathrm{Sym}_L = S_1 \ldots S_k$, $ord(S_i) = d_i$, $i = 1, \ldots, k$, и

$$F_1 \circ \ldots \circ F_k, \quad F'_1 \circ \ldots \circ F'_k$$

– частичные факторизации порядков t и t' соответственно. Пусть $t' < t$, тогда $F'_1 \circ \ldots \circ F'_k$ продолжает $F_1 \circ \ldots \circ F_k$, если

$$ord(F_i - F'_i) < t - (d - d_i), \; \forall i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Пример 1. Рассмотрим оператор пятого порядка:

$$L = (D_1^2 + D_2 + 1) \circ (D_1^2 D_2 + D_1 D_2 + D_1 + 1).$$

Разложения типа

$$(D_1^2 + \ldots) \circ (D_1^2 D_2 + \ldots) \ ,$$

где многоточия означают произвольно выбранные члены меньших порядков, являются частичными факторизациями порядка 5, для которых продолжением порядка 4 являются частичные факторизации вида

$$(D_1^2 + D_2 + \ldots) \circ (D_1^2 D_2 + D_1 D_2 + \ldots).$$

Замечание 3. *Пусть $L \in K[D]$. В этом случае $F_1 \circ \ldots \circ F_k$ является его частичной факторизацией типа $(S_1) \ldots (S_k)$ тогда и только тогда, когда $F_1 \circ \ldots \circ F_k$ есть некоторое продолжение частичной факторизации $S_1 \circ \ldots \circ S_2$.*

Сформулируем два легко доказываемых факта, которые будут полезны в дальнейшем для доказательства теоремы.

Предложение 1. *Пусть S_1, S_2, p – однородные многочлены от произвольного числа независимых переменных степеней d_1, d_2, s $(0 < s < d_1 + d_2)$ соответственно. Пусть, к тому же, S_1 и S_2 взаимно просты. Тогда существует не более одной пары (u, v) однородных многочленов u и v степеней $s - d_1$ и $s - d_2$ соответственно, таких, что*

$$S_1 \cdot u + S_2 \cdot v = p.$$

Второй факт – обобщение предложения 1 на случай не взаимно простых многочленов.

Предложение 2. *Пусть S_1, S_2, p – однородные многочлены степеней d_1, d_2, s соответственно от произвольного числа переменных, а многочлен S_0 степени d_0 – наибольший общий делитель S_1 и S_2, и $0 < s < d_1 + d_2 - d_0$. Тогда существует не более одной пары (u, v) однородных многочленов u и v степеней $s - d_1$ и $s - d_2$ соответственно, таких, что*

$$S1 \cdot u + S2 \cdot v = p. \qquad (3)$$

Для любой факторизации $S_1 \cdot S_2$ символа соответствующая композиция операторов $\widehat{S}_1 \circ \widehat{S}_2$ является частичной факторизацией оператора L. В случае взаимно простых S_1 и S_2 существует не более одного продолжения этой частичной факторизации до факторизации L [1]. Если же существует нетривиальный общий делитель у S_1 и S_2, то это не всегда так: возьмем, например, оператор Блюмберга-Ландау [6]

$$L = D_x^3 + x D_x^2 D_y + 2D_x^2 + (2x + 2) D_x D_y + \\ + D_x + (2 + x) D_y,$$

который обычно приводится как пример оператора, имеющего две различные факторизации на разное число множителей (конечно, множители неприводимы, то есть не факторизуемы на множители меньших порядков):

$$L = (D_x + 1) \circ (D_x + 1) \circ (D_x + x D_y) = \\ = (D_x^2 + x D_x D_y + D_x + (2 + x) D_y) \circ (D_x + 1).$$

У этого же оператора L (его символ, кстати, равен $X^3 + xX^2Y$), существует целое семейство факторизаций на два множителя с символами $S_1 = X$ и $S_2 = X(X + XY)$ соответственно:

$$L = \Big(D_x + 1 + \frac{1}{x + f_1(y)}\Big) \circ \\ \circ \Big(D_x^2 + x D_x D_y + (1 - \frac{1}{x + f_1(y)}) D_x + \\ + (x + 1 - \frac{x}{x + f_1(y)}) D_y\Big),$$

где $f_1(y) \in K$ – фукциональный параметр. Таким образом, единственности факторизации нет. Тем не менее, даже в этом случае не взаимно простых символов множителей факторизации мы можем кое-что сказать.

Теорема 1. *Пусть $L \in K[D]$, $\mathrm{Sym}_L = S_1 \cdot S_2$, $ord(L) = d$, и многочлен S_0 степени d_0 – наибольший общий делитель S_1 и S_2. Тогда для любой частичной факторизации порядка $(d - d_0)$ типа $(S_1)(S_2)$ существует не более одного продолжения до факторизации оператора L того же типа.*

Для доказательства теоремы достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть $L \in K[D]$, $\mathrm{Sym}_L = S_1 \cdot S_2$, $ord(L) = d$, и многочлен S_0 степени d_0 – наибольший общий делитель S_1 и S_2. Тогда для любой частичной факторизации порядка t, где $t \leq (d - d_0)$, и типа $(S_1)(S_2)$ существует не более одного продолжения до частичной факторизации порядка $t - 1$ (с точностью до членов младшего порядка).*

Доказательство. Если $d_0 = 0$, то утверждение следует из результатов [1]. Если $d_0 > 0$, запишем продолжение данной частичной факторизации порядка t до факторизации оператора в общем виде:

$$L = \left(\widehat{S}_1 + \sum_{j=0}^{k_1-1} G_j\right) \circ \left(\widehat{S}_2 + \sum_{j=0}^{k_2-1} H_j\right), \qquad (4)$$

где $k_1 = ord(S_1)$, $k_2 = ord(S_2)$ и $G_j \in K_j[D]$, $H_i \in K_i[D]$, $j = 0, \ldots, (k_1 - 1)$, $i = 0, \ldots, (k_2 - 1)$. Сравнивая компоненты степени $t-1$ в обеих частях равенства (4), мы имеем:

$$L_{t-1} = H_{t-k_1-1} \cdot S_1 + G_{t-k_2-1} \cdot S_2 + P_{t-1}, \qquad (5)$$

где P_{t-1} – однородный многочлен степени t, вычисляющийся однозначно по однородным многочленам G_i, H_j, $i > t-k_1-1$, $j > t-k_2-1$ – компонентам исходной частичной факторизации порядка t. Также мы считаем, что однородные многочлены G_i, H_i равны 0 при $i < 0$.

Теперь, так как $t-1 < d-d_0$, мы можем применить предложение 2, а значит, существует не более одного решения уравнения (5). То есть существует не более одного продолжения до частичной факторизации порядка $t-1$. □

Следствие 1. *В случае взаимно простых S_1 и S_2 существует не более одной факторизации L типа $(S_1)(S_2)$. То есть теорема Григорьева-Шварца [1] является частным случаем доказанной теоремы.*

Следствие 2. *В случае обыкновенных дифференциальных операторов*

$$\text{НОД } (S_1, S_2) = X^{d_0},$$

где

$$d_0 = min(ord(S_1), ord(S_2)).$$

Тогда для любой частичной факторизации порядка

$$max(ord(S_1), ord(S_2)) - 1$$

существует не более одного продолжения до факторизации в обычном смысле.

Следствие 3. *Пусть $L \in K[D]$, $\mathrm{Sym}_L = S_1 \cdot S_2$, а S_1 взаимно просто с S_2, тогда для любого t, $t < ord(L)$, существует не более одной (с точностью до членов меньшего порядка) частичной факторизации порядка t.*

4. КОЛЬЦО ПРЕПЯТСТВИЙ, ПРЕПЯТСТВИЯ

Индукцией по количеству множителей на базе теоремы о единственности факторизации для случая двух множителей [1] получается следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть $L \in K[D], \mathrm{Sym}_L = S_1 \cdot S_2 \ldots S_k$, и $S_1, \ldots, S_k$ взаимно просты. Тогда существует не более одной факторизации типа $(S_1)(S_2)\ldots(S_k)$.*

Рассмотрим разложимые операторы как подмногообразие среди всех операторов из $K[D]$ с данным разложением символа.

Теорема 3. *Пусть K – поле, рассмотрим многообразие операторов из $K[D]$ с фиксированным символом $\mathrm{Sym} = S_1 \ldots S_k$, $ord(S_i) = d_i$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда коразмерность подмногообразия операторов, имеющих факторизацию типа $(S_1)(S_2)\ldots(S_k)$, равна*

$$\binom{n+d-1}{n} - \sum_{i=1}^{k} \binom{n+d_i-1}{n}.$$

Доказательство. Любой оператор L из рассматриваемого множества можно записать в виде

$$L = \left(S_1 + \sum_{i=0}^{d_1-1} G_i^1\right) \circ \ldots \circ \left(S_k + \sum_{i=0}^{d_k-1} G_i^k\right), \qquad (6)$$

где G_i^j обозначает компоненту i-ой степени в j-ом множителе. Сравнивая компоненты степени t, $0 \le t \le ord(L) - 1$, в обеих частях (6), имеем:

$$\begin{aligned} P_t = (\mathrm{Sym}/S_1) \cdot G^1_{t-d+d_1} + \ldots + \\ +(\mathrm{Sym}/S_k) \cdot G^k_{t-d+d_k}, \end{aligned} \qquad (7)$$

где P_t – однородный многочлен степени t, вычисляющийся однозначно по однородным многочленам G_i, H_j, $i > t-k_1$, $j > t-k_2$, а значит, его можно считать известным, если мы решаем уравнения в "убывающем" порядке, то есть начиная с $t = ord(L) - 1$ и на каждом шаге уменьшая t на единицу.

Многочлены G_i, H_j, $i > t-k_1$, $j > t-k_2$, а значит, и P_t определяются единственным образом. Это немедленно следует из следующей леммы:

Лемма 2. *Пусть $S_1, \ldots, S_k$ – попарно взаимно-простые однородные многочлены порядков $d_1, \ldots, d_k$ соответственно. Обозначим $S = S_1 \ldots S_k$. Тогда существует не более одного набора $(A_1, \ldots, A_k)$ такого, что*

$$P_t = (S/S_1) \cdot A_1 + \ldots + (S/S_k) \cdot A_k, \qquad (8)$$

где $\mathrm{ord}(P_t) = t$, $t < \mathrm{ord}(S)$, *и* $\mathrm{ord}(A_i) + \mathrm{ord}(S/S_i) = t$.

Доказательство. Предположим, есть два таких набора: $(A'_1, \ldots, A'_k)$ и $(A''_1, \ldots, A''_k)$. Рассмотрим разность сответствующих им уравнений; имеем:

$$0 = (S/S_1) \cdot B_1 + \ldots + (S/S_k) \cdot B_k, \qquad (9)$$

где $B_i = A'_i - A''_i, i = 1, \ldots, k$. Без ограничения общности предположим, что $B_1 \neq 0$, и перепишем уравнение (9) в виде:

$$-(S/S_1) \cdot B_1 = (S/S_2) \cdot B_2 + \ldots + (S/S_k) \cdot B_k.$$

Теперь любое слагаемое справа делится на S_1, в то время как (S/S_1) – не делится. Поэтому B_1 должно делиться на S_1, а значит, $ord(B_1) \geq ord(S_1)$.

С другой стороны, мы знаем, что $ord(A_i) + ord(S/S_i) = t$ и $t < ord(S)$, то есть $ord(A_i) < ord(S_i)$, и значит, $ord(B_1) < ord(S_i)$. Противоречие с выводом предыдущего абзаца. □

Условие существования факторизации определяется совместностью системы всех уравнений (7), $t = d - 1, \ldots, 0$. Искомая коразмерность равна количеству независимых уравнений на коэффициенты оператора.

Для каждого t мы имеем линейное уравнение (7) на многочлены $G^1_{t-d+d_1}, \ldots, G^k_{t-d+d_k}$, которое эквивалентно системе линейных уравнений на их коэффициенты. Пусть наша система – это $A \cdot \vec{g} = \vec{c}$, где A – матрица системы. Система имеет единственное решение, а значит, ранг матрицы A равен числу переменных v, то есть столбцы матрицы A линейно-независимы.

Система $A \cdot \vec{g} = \vec{c}$ совместна, когда вектор $\vec{c}$ принадлежит v-мерному аффинному пространству, порожденному столбцами A. Длина вектора $\vec{c}$ равна количеству уравнений в системе. То есть коразмерность пространства решений системы равна разности между количеством уравнений и количеством переменных. А общая коразмерность операторов, имеющих факторизацию типа $(S_1)(S_2)\ldots(S_k)$, равна разности между количеством уравнений и количеством переменных на всех шагах вместе. А это легко посчитать, используя известный комбинаторный факт:

Лемма 3. *Мощность множества*

$$\{M = x_1^{d_1} \ldots x_n^{d_n} \mid d_1 + \ldots + d_n = t\}$$

мономов от n независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ равна $\begin{pmatrix} n+t-1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+t-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$.

Теорема о коразмерности доказана. □

Пример 2. Рассмотрим все операторы второго порядка от двух независимых переменных с символом $S_1 \cdot S_2$, где S_1, S_2 – взаимно простые фиксированные однородные операторы первого порядка. По теореме 3 коразмерность многообразия операторов, имеющих факторизацию типа $(S_1)(S_2)$, равна 1.

Можно найти явную формулу уравнения, задающего это многообразие. Пусть, например, $\widehat{S}_1 = D_1$, $\widehat{S}_2 = D_2$. Рассмотрим все операторы вида $L = D_1D_2 + a_{10}D_1 + a_{01}D_2 + a_{00}$. Такой оператор имеет факторизацию типа $(S_1)(S_2)$ тогда и только тогда, когда коэффициенты a_{10}, a_{01}, a_{00} удовлетворяют соотношению

$$a_{00} - a_{10}a_{01} - \partial_x(a_{10}) = 0.$$

Пример 3. Рассмотрим все операторы третьего порядка от двух независимых переменных с символом, равным $S_1 \cdot S_2$, где S_1, S_2 – взаимно простые фиксированные однородные операторы первого и второго порядка соответственно. Коразмерность многообразия операторов, имеющих факторизацию типа $(S_1)(S_2)$, равна 2.

Если же мы рассмотрим факторизацию типа $(S_1)(S_2)(S_3)$, где S_1, S_2, S_3 – взаимно простые фиксированные операторы первого порядка, то по теореме 3 коразмерность равна 3.

Следующее понятие вводится для изучения операторов, не имеющих факторизации некоторого типа:

Определение 4. Пусть $L \in K[D]$, $\mathrm{Sym}_L = S_1 \ldots S_k$. Мы скажем, что оператор $R \in K[D]$ является *обычным препятствием* к факторизации L типа $(S_1)(S_2)\ldots(S_k)$, если оператор $L - R$ имеет факторизацию типа $(S_1)(S_2)\ldots(S_k)$, и порядок R – минимальный среди порядков операторов с таким свойством.

Обычные препятствия тесно связаны с ранее введенными частичными факторизациями.

Предложение 3. *Пусть* $L \in K[D]$, $\mathrm{Sym}_L = S_1 \ldots S_k$. *Тогда обычное препятствие к факторизации типа* $(S_1)\ldots(S_k)$ *имеет порядок* t *тогда и только тогда, когда* $t+1$ *– минимальный порядок частичной факторизации.*

Понятно, что обычные препятствия определены не однозначно, более того, их символы определены не однозначно. Чтобы добиться однозначного, инвариантного в каком-то смысле понятия, введем следующее определение:

Определение 5. Пусть $L \in K[D]$ и $\mathrm{Sym}_L = S_1 \cdot S_2 \cdot \ldots \cdot S_k$. Назовем *кольцом препятствий* для факторизаций типа $(S_1)\ldots(S_k)$ фактор-кольцо

$$K(S_1, \ldots, S_k) = K[X]/I,$$

где $I = \left(\frac{\mathrm{Sym}_L}{S_1}, \frac{\mathrm{Sym}_L}{S_2}, \ldots, \frac{\mathrm{Sym}_L}{S_k}\right)$ – однородный идеал.

Замечание 4. *В случае двух множителей* $(k=2)$ *кольцо препятствий равно*

$$K(S_1, S_2) = K[X]/(S_1, S_2),$$

что совпадает с определением, введенным в работе [5], *где исследуется случай двух множителей.*

Теорема 4. *Пусть* $L \in K[D]$ *и* $\mathrm{Sym}_L = S_1 \cdot S_2 \ldots S_k$, *где* S_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, *– попарно взаимно просты. Тогда символы всех обычных препятствий типа* $(S_1)\ldots(S_k)$ *принадлежат одному смежному классу фактор-кольца* $K(S_1, \ldots, S_k)$.

Доказательство. Обозначим $d_i = ord(S_i)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, и пусть t – порядок обычных препятствий. Повторив рассуждения теоремы 3, получаем уравнение (7), то есть символ любого общего препятствия можно записать в виде

$$P_t - ((\mathrm{Sym}_L/S_1) \cdot G^1_{t-d+d_1} + \ldots + \\ +(\mathrm{Sym}_L/S_k) \cdot G^k_{t-d+d_k}),$$

где P_t – известный, единственно определенный и одинаковый для всех обычных препятствий многочлен. То есть все обычные препятствия лежат в смежном классе $[P_t]$ фактор-кольца $K(S_1, \ldots, S_k)$. □

Определение 6. Смежный класс символов обычных препятствий в кольце препятствий назовем *препятствием* к факторизации.

Замечание 5. *Любой элемент из этого смежного класса является обычным препятствием.*

Определение 7. *Типы факторизаций* $(S_1)\ldots(S_k)$ *и* $(b_1S_1)\ldots(b_kS_k)$ *назовем схожими, если* $b_1, \ldots, b_k \in K$ *и* $b_1 \ldots b_k = 1$.

Теорема 5. *Для фиксированного оператора кольца препятствий и препятствия схожих типов совпадают.*

Доказательство. Фиксируем оператор $L \in K[D]$ и два схожих типа факторизаций: $(S_1)\ldots(S_k)$ и $(b_1S_1)\ldots(b_kS_k)$, где $b_i \in K$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда однородные идеалы $(S_1, \ldots, S_k)$ и $(b_1S_1, \ldots, b_kS_k)$ совпадают, а значит, и кольца препятствий.

Любое обычное препятствие типа $(S_1)\ldots(S_k)$ и порядка d_0 можно записать в виде

$$P = L - (\widehat{S}_1 + T_1) \circ \ldots \circ (\widehat{S}_k + T_k), \qquad (10)$$

где T_i – сумма компонент порядков $d_i - 1, \ldots, d - d_i - d_0 + 1$, и $ord(P) = d_0$.

Существуют $T'_1, \ldots, T'_k$ такие, что T'_i, как и T_i, – сумма компонент порядков $d_i - 1, \ldots, d - d_i - d_0 + 1$, и

$$(S_1 + T_1) \circ \ldots \circ (S_k + T_k) = \\ = (b_1S_1 + T'_1) \circ \ldots \circ (b_kS_k + T'_k).$$

Поэтому P является обычным препятствием порядка d_0 типа $(b_1S_1)\ldots(b_kS_k)$. С другой стороны, мы уже доказали, что кольца препятствий $K(S_1, \ldots, S_k)$ и $(b_1S_1, \ldots, b_kS_k)$ совпадают. А значит, совпадают и смежные классы, то есть препятствия схожих типов совпадают. □

Напомним определение:

Определение 8. Пусть $g \in K^*$ – обратимый элемент из кольца K, а $L \in K[D]$. Тогда оператор $g^{-1} \circ L \circ g$ называется сопряженным к L.

Теорема 6. *При сопряжении операторов обычные препятствия сопрягаются: если* P *– обычное препятствие для* $L \in K[D]$, *то* $g^{-1}Pg$ *– для* $g^{-1}Lg$, *где* $g \in K^*$.

Доказательство. Рассмотрим (10) – обычное препятствие для L порядка d_0. Сопряжем равенство с помощью g:

$$g^{-1}Pg = g^{-1}Lg - g^{-1} \circ (S_1 + T_1) \circ \\ \circ \Pi_{j=2}^{k-1}(S_i + T_i) \circ (S_k + T_k) \circ g.$$

Существуют $T'_1, \ldots, T'_k$ такие, что T'_i, как и T_i, – сумма однородных операторов порядков $d_i -$

$-1, \ldots, d - d_i - d_0 + 1$, и

$$g^{-1}Pg = g^{-1}Lg - (g^{-1}S_1 + T_1')\circ \\ \circ\Pi_{j=2}^{k-1}(S_i + T_i') \circ (gS_k + T_k').$$

□

Следствие 4. *Препятствия сопряженных операторов совпадают.*

Доказательство. При сопряжении операторов обычные препятствия сопрягаются, а значит символ обычных препятствий остается неизменным. □

Теорема 7. *Пусть* $n = 2$, $L \in K[D]$, $ord(L) = d$, *и* $\mathrm{Sym}_L = S_1 \ldots S_k$, *где* S_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$, *попарно взаимно просты. Тогда кольцо препятствий* $K(S_1, \ldots, S_k)$ *равно* 0 *в степени* $d-1$. (*То есть настоящие препятствия могут быть порядка* $d-2$ *или меньше.*)

Доказательство. Обозначим $d_i = ord(S_i)$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, и, повторив рассуждения теоремы 3, запишем уравнение (7) для $t = d - 1$:

$$P_{d-1} = (\mathrm{Sym}_L/S_1)\cdot G^1_{d_1-1} + \ldots + (\mathrm{Sym}_L/S_k)\cdot G^k_{d_k-1},$$

которое имеет не более одного решения относительно $G^1_{d_1-1}, \ldots, G^k_{d_k-1}$. Рассмотрим соответствующую систему линейных уравнений на их коэффициенты. По лемме 3 количество уравнений в такой системе равно d, и число переменных тоже равно d. То есть система имеет единственное решение, а значит, мы нашли частичную факторизацию порядка $d - 1$. □

Напомним, что оператор $L \in K[D], ord(L) = d$, называется строго гиперболичным, если его символ раскладывается на d различных множителей.

Теорема 8. *Пусть* $n = 2$, *и* $L \in K[D]$ – *строго гиперболичный оператор порядка* d. *Тогда обычное препятствие фиксированного типа факторизации на множители первого порядка определяется однозначно.*

Доказательство. Пусть $(S_1)\ldots(S_d)$ – некоторый тип факторизации, а P – обычное препятствие для этого типа факторизаций. Пусть порядок препятствий равен p. Предположим, есть другое обычное препятствие этого типа, тогда оно имеет вид

$$P + (\mathrm{Sym}_L/S_1)\cdot A_1 + \ldots + (\mathrm{Sym}_L/S_d)\cdot A_d,$$

где A_i – однородные многочлены порядков $p_i = p - ord(\mathrm{Sym}_L/S_i) = p - (d-1)$. То есть $p \geq d - 1$. С другой стороны, по теореме 7, кольцо препятствий в порядке $d - 1$ равно 0, поэтому $p \leq d - 2$. □

5. ОПЕРАТОРЫ СТЕПЕНИ ДВА ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим гиперболический оператор $L \in K[D_x, D_y]$ второго порядка и в системе координат, где его символ имеет вид XY. Тогда по теоремам 7 и 8 его оба обычные препятствия имеют порядок 0 и определены однозначно. Найдем явные формулы.

Теорема 9. *Пусть*

$$L = D_x \cdot D_y + aD_x + bD_y + c,$$

где $a_{10}, a_{01}, a_{00} \in K$. *Тогда препятствия типов* $(X)(Y)$, $(Y)(X)$ *равны соответственно*

$$c - ab - \partial_x(a), \\ c - ab - \partial_y(b).$$

Доказательство. Факторизация L типа $(X)(Y)$ имеет вид

$$L = (D_x + g_{00}) \circ (D_y + h_{00}),$$

где g_{00}, h_{00} – некоторые элементы K. Сравнивая компоненты порядка 1 слева и справа, имеем:

$$(a - h_{00})D_x + (b - g_{00})D_y = 0, \qquad (11)$$

то есть $a = h_{00}$, $b = g_{00}$. Теперь вычисляем препятствие как

$$L - (D_x + b) \circ (D_y + a) = c - ab - \partial_x(a).$$

Препятствие типа $(Y)(X)$ находится аналогично. □

Замечание 6. *Найденные препятствия совпадают с инвариантами Лапласа* [2].

6. ОПЕРАТОРЫ СТЕПЕНИ ТРИ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим оператор $L \in K[D_1, D_2]$ третьего порядка. Пусть его символ равен $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3$, тогда возможны следующие типы факторизаций:

$$(S_1)(S_2)(S_3),\ (S_1)(S_3)(S_3),\ (S_2)(S_1)(S_3), \\ (S_2)(S_3)(S_1),\ (S_3)(S_1)(S_2),\ (S_3)(S_2)(S_1)$$

– шесть для факторизаций на три множителя и шесть – на два множителя:

$$(S_1)(S_2S_3),\ (S_2)(S_1S_3),\ (S_3)(S_1S_2),$$
$$(S_1S_2)(S_3),\ (S_1S_3)(S_2),\ (S_2S_3)(S_1).$$

6.1. *Два множителя*

Наша теория работает в случае взаимно простых символов множителей, то есть, если рассматриваемый тип – $(S_1)(S_2S_3)$, то S_1 и S_2S_3 должны быть взаимно просты. Учитывая это, а также то, что симметричные типы рассматриваются аналогично, мы ограничились рассмотрением двух важных случаев: типа факторизаций $(X)(X^2+XY)$ для оператора с символом X^2Y+XY^2 и типа $(X)(Y^2)$ – для оператора с символом XY^2.

Заметим, что по теореме 7 такие обычные препятствия могут быть только порядков один или ноль, в первом случае обычное препятствие находится не однозначно.

Теорема 10. *Пусть*

$$L=\widehat{\mathrm{Sym}}_L+a_{20}D_{xx}+a_{11}D_{xy}+$$
$$+a_{02}D_{yy}+a_{10}D_x+a_{01}D_y+a_{00},$$

где все $a_{ij}\in K$.

Пусть $\mathrm{Sym}_L=XY(X+Y)$, *тогда*

$$\mathrm{Obst}_{(X)(YX+YY)}=$$
$$=\Big(a_{02}^2-a_{11}a_{02}+a_{01}+\partial_x(a_{02}-a_{11})\Big)D_y+$$
$$+a_{00}-a_{02}a_{10}+a_{02}^2a_{20}+2a_{02}\partial_x(a_{20})-$$
$$-\partial_x(a_{10})+a_{20}\partial_x(a_{02})+\partial_{xx}(a_{20}),$$

– обычное препятствие к факторизациям L *типа* $(X)(YX+YY)$.

Пусть $\mathrm{Sym}_L=X^2Y$, *тогда*

$$\mathrm{Obst}_{(Y)(XX)}=$$
$$=\Big(a_{10}-a_{20}a_{11}-\partial_y(a_{11})\Big)D_x+$$
$$+a_{00}-a_{20}a_{01}+a_{20}^2a_{02}+2a_{20}\partial_y(a_{02})-$$
$$-\partial_y(a_{01})+a_{02}\partial_y(a_{20})+\partial_{yy}(a_{02}),$$

– обычное препятствие к факторизациям L *типа* $(Y)(XX)$.

Доказательство. Все факторизации типа $(X)(YX+YY)$ имеют вид

$$L=(D_x+G_0)\circ(D_{xy}+D_{yy}+H_1+H_0)\,, \quad (12)$$

где $G_0=g_{00}\in K$, $H_1=h_{10}D_x+h_{01}D_y\in$ $\in K[D_x,D_y]$, $H_0=h_{00}\in K$. Сравнивая компоненты порядка 2 в обеих частях равенства (12), получаем систему линейных уравнений на коэффициенты h_{10},h_{01},g_{00}:

$$\begin{cases} a_{20}=h_{10},\\ a_{11}=h_{01}+g_{00},\\ a_{02}=g_{00}.\end{cases}$$

Находим единственное решение системы. Затем, сравнивая коэффициенты при D_x в обеих частях (12), получаем:

$$h_{00}=a_{10}-a_{20}a_{02}-\partial_x(a_{20}).$$

Теперь мы можем вычислить обычное препятствие как $P=L-(D_x+G_0)\circ(D_{xy}+$ $+D_{yy}+H_1+H_0)$.

Аналогично находим обычное препятствие для типа факторизации $(Y)(XX)$. □

6.2. *Три множителя*

Здесь достаточно рассмотреть случай гиперболического оператора с символом $XY(X+Y)$ и тип факторизации $(X)(Y)(X+Y)$. В этом случае обычное препятствие может быть только порядков 1 и 0 (теорема 7), и оно единственно (теорема 8).

Теорема 11. *Пусть*

$$L=D_xD_y(D_x+D_y)+a_{20}D_{xx}+a_{11}D_{xy}+$$
$$+a_{02}D_{yy}+a_{10}D_x+a_{01}D_y+a_{00},$$

где все $a_{ij}\in K$. *Обычное препятствие типа* $(X)(Y)(X+Y)$ *равно*

$$\mathrm{Obst}_{(X)(Y)(X+Y)}=$$
$$=(a_{10}-a_{20}a_{11}+a_{20}^2-\partial_x(a_{20})+\partial_y(s_2))D_x+$$
$$+(a_{01}-a_{02}a_{11}+a_{02}^2+\partial_x(-a_{11}+a_{02}))D_y+$$
$$+a_{00}+a_{20}a_{02}s_2+s_2\partial_x(a_{20})+$$
$$+(a_{20}\partial_x+\partial_{xy}+a_{02}\partial_y)(s_2),$$

где $s_2=a_{20}-a_{11}+a_{02}$.

Доказательство. Запишем факторизацию типа $(X)(Y)(X+Y)$ в общем виде:

$$L=(D_x+g_0)\circ(D_y+h_0)\circ(D_x+D_y+f_0)\,. \quad (13)$$

Сравнивая компоненты порядка 2 слева и справа, мы получаем единственное решение

$$h_0=a_{20},\ g_0=a_{02},\ f_0=a_{11}-a_{02}-a_{20}.$$

Теперь можно вычислить обычное препятствие как разность левой и правой части в равенстве (13). □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grigoriev D., Schwarz F.* Factoring and Solving Linear Partial Differential Equations // J. Computing. 2004. V. 73. P. 179–197.
2. *Tsarev S.P.* Generalized Laplace Transformations and Integration of Hyperbolic Systems of Linear Partial Differential Equations. Proc. ISSAC'05. 2005.
3. *Kartashova E.* Hierarchy of general invariants for bivariate LPDOs // J. Theoretical and Mathematical Physics. 2006.
4. *Shemyakova E.* A Full System of Invariants for Third-Order Linear Partial Differential Operators // Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2006.
5. *Shemyakova E., Winkler F.* Obstacle to Factorization of LPDOs. Proc. Transgressive Computing. Granada, Spain, 2006.
6. *Blumberg H.* Über algebraische Eigenschaften von linearen homogenen Differentialausdrücken. Diss., Göttingen. 1912.
7. www.maple.com.
8. *Tsarev S.P.* On the problem of factorization of linear ordinary differential operators // Programming and computer software. 1994. V. 20. №1. P. 27–29.
9. *Vinogradov A., Krasilshik I., Lychagin B.* Introduction in geometry of nonlinear differential systems (in russian). Nauka, 1986.