Mathematik

Die Kunst des effektiven Handelns

Bruno Buchberger

RISC (Research Institute for Symbolic Computation)

Johannes Kepler Universität, Linz / Schloss Hagenberg

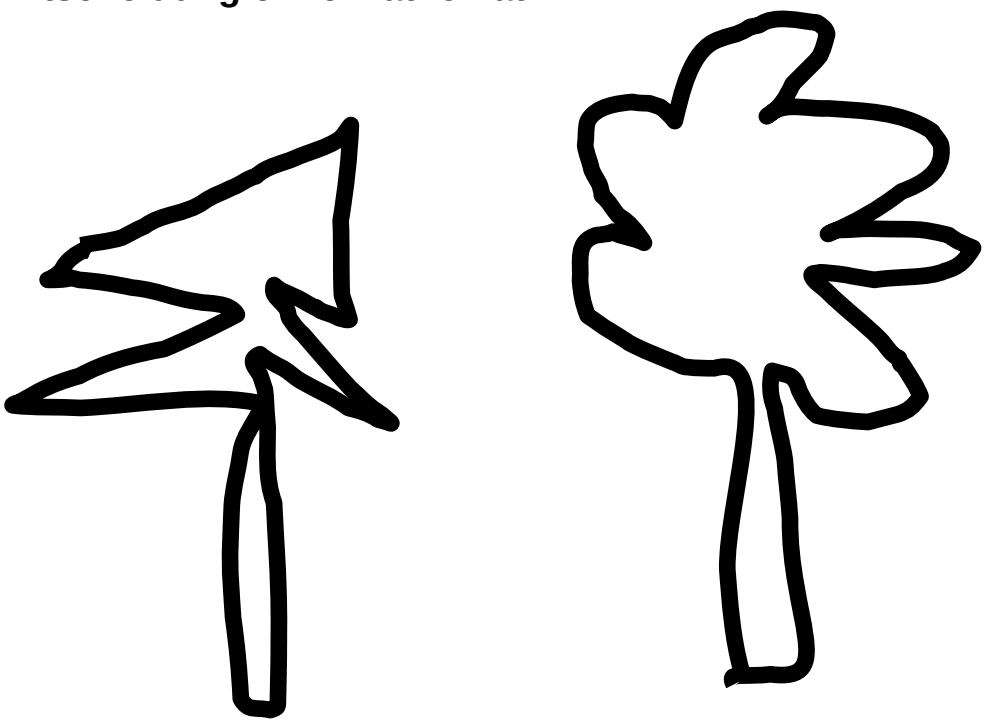
Vortrag im MathSpace, Wien, 12. Mai 2005

Copyright Bruno Buchberger 2005

Copying, printing, and storing this file is granted under the following conditions:

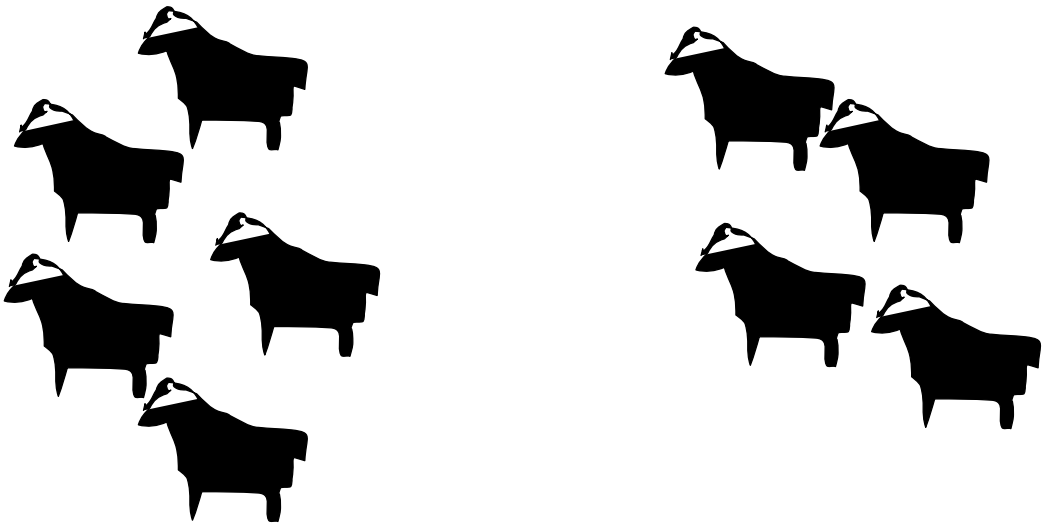
- The file is kept unchanged and complete and this copyright note is included.
- A mail is sent to bruno.buchberger@jku.at
- If you use the material, cite it appropriately.

Eine Entscheidung ohne Mathematik



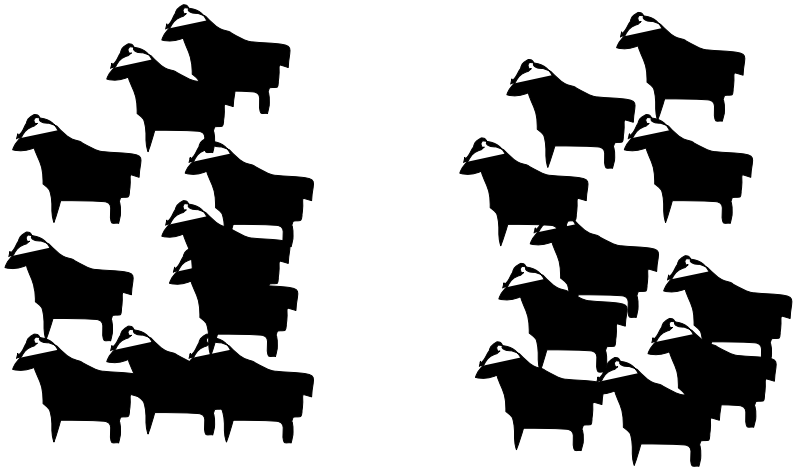
Ist das derselbe Baum? Eine Entscheidung "auf einen Blick", durch Beobachten.

Eine Entscheidung ohne Mathematik



Fehlt kein Tier in meiner Herde? Eine Entscheidung "auf einen Blick", durch Beobachten.

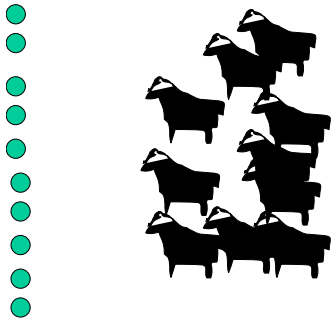
Eine Entscheidung ohne Mathematik?



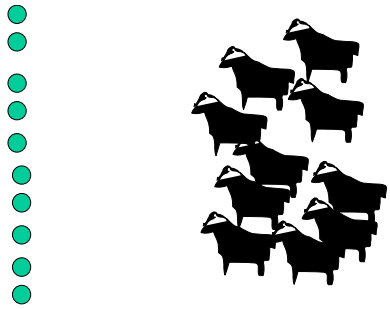
Fehlt kein Tier in meiner Herde? Nicht mehr "mit einem Blick" möglich.

Eine Entscheidung mit Mathematik

"Zähle" mit Steinchen!



"Zähle" nochmals mit Steinchen!

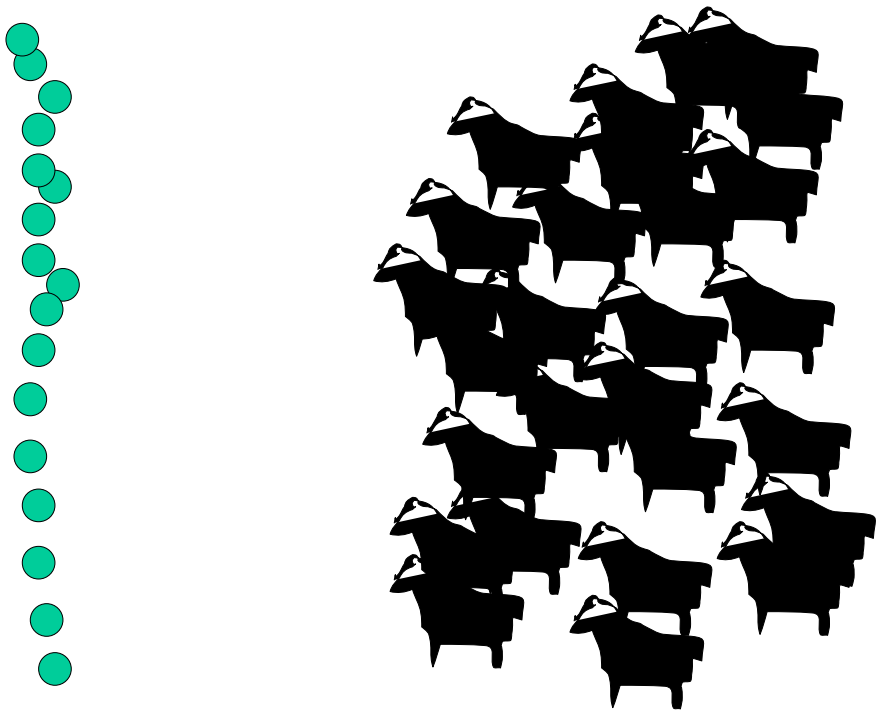


Mathematik = Arbeiten in Modellen

Modelle sind "abstrakt".

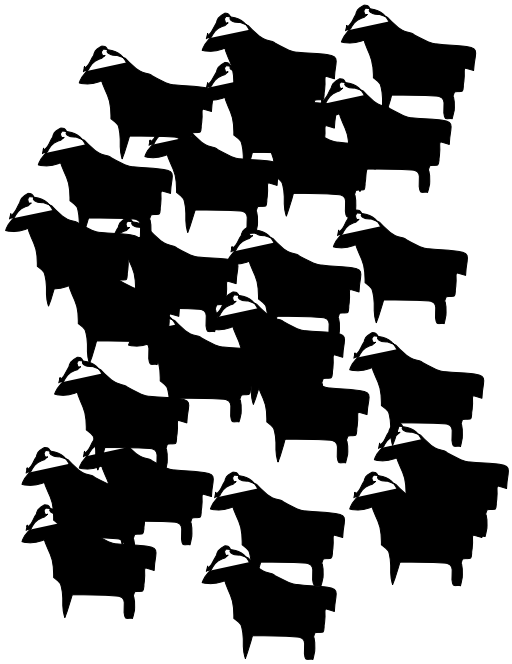
Weil Modelle abstrakt sind, sind sie so effizient.

Primitive Modelle sind für sehr große Realitäten zu wenig effizient



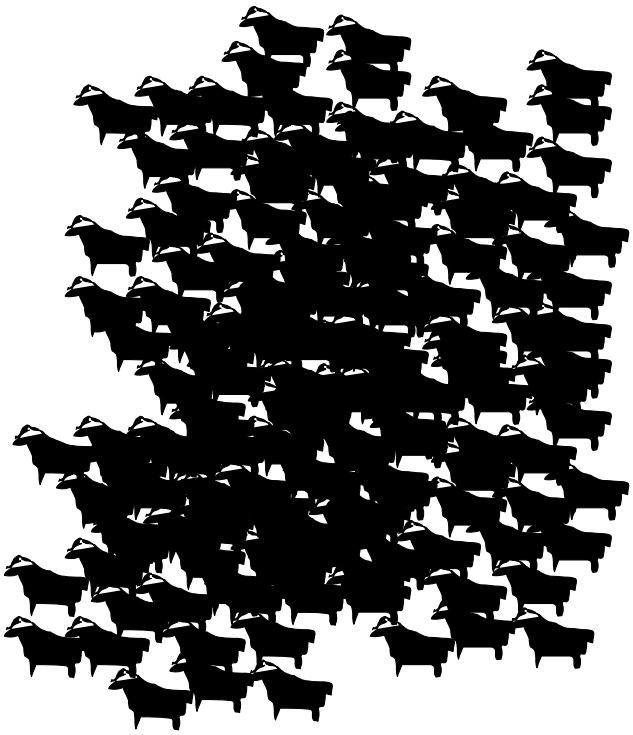
Ein besseres Modell

27



"Exponentiell" besser als das Steinchenmodell! Warum?

148



Mathematik = "für alle" Wissen

"Für alle" Zahlen a, b, c:

a . (b + c) = a . b + a . c

Mehr Wissen erlaubt effizienteres Handeln

```
27 ... 2 . 10 + 7 . 1
```

Unter Anwendung des obigen Wissens:

```
27 . 4 ... (2 . 10 + 7 . 1) . 4 =

          = 8 . 10 + 28.1 ...

        ... 8 . 10 + 2 .10 + 8.1 =

          = 10. 10 + 8.1 = 1.100 + 0.10 + 8.1 ...

        ... 108
```

Kurzschreibweise dieses Gedankenganges:

$$\frac{27 \,.\, 4}{2}$$

108

Wie erhält man "für alle" Wissen? Durch Denken!

Denken - Schließen - Beweisen: Reduzieren von komplizierterem Wissen auf einfacheres Wissen in Denkschritten, die so einfach sind, dass sie "jeder" überprüfen kann.

Zu beweisen: a . (b + c) = a . b + a . c

Beweis:

$$0.(b+c)=0,$$

$$0.b+0.c=0+0=0.$$

$$(a+1)(b+c)=a.(b+c)+(b+c)=a.b+a.c+b+c,$$

$$(a+1).b+(a+1)c=a.b+b+a.c+c=a.b+a.c+b+c.$$

Mathematik = Wissenserwerb durch Schließen

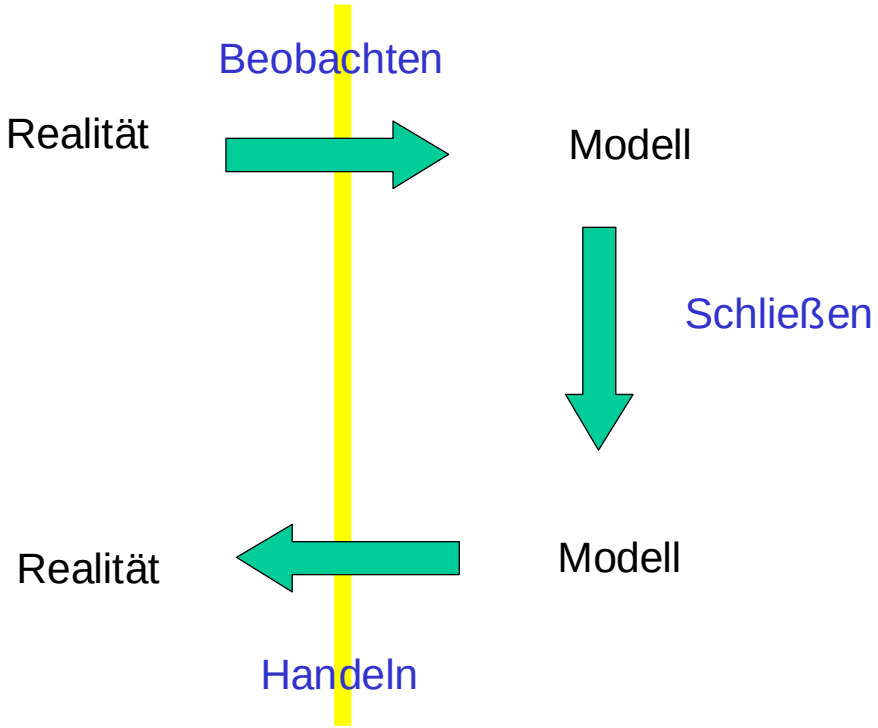
Nicht durch Beobachten!

Ob das einfachste Wissen "in der Welt" gilt, ist keine mathematische Frage.

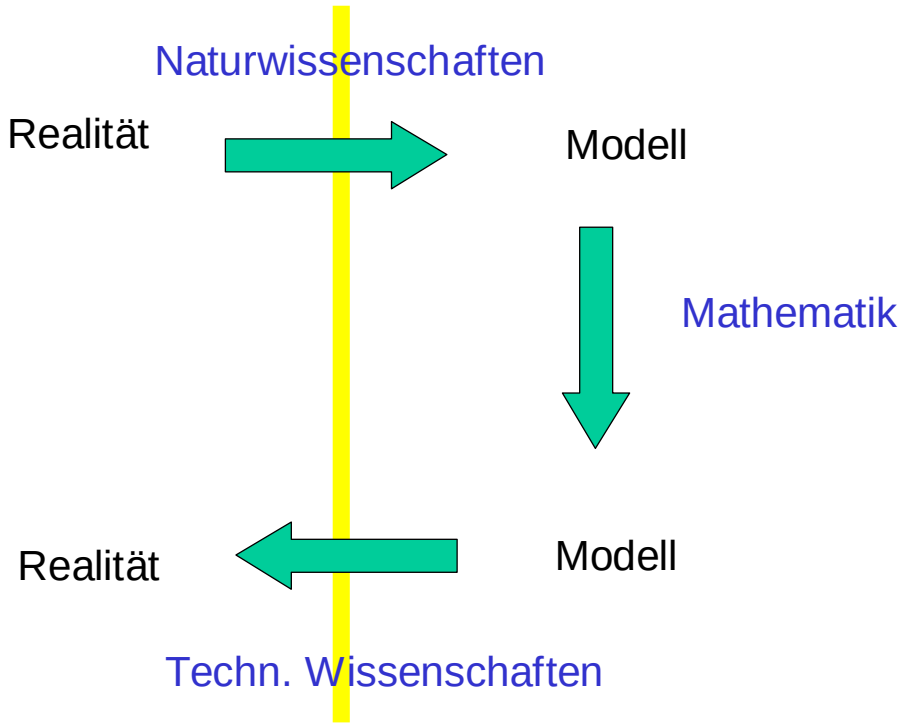
Sondern umgekehrt: In den Realitäten, in denen man glaubt, dass das einfachste Wissen gilt, gilt dann auch alles erschlossene Wissen!

Mathematik ist eine relative Wissenschaft!

Mit anderen Worten: Beweisen ist das, was Mathematik charakterisiert



Überspitzt:



Warum ist die "wissenschaftliche" Methode so praktisch, obwohl Mathematik relativ ist?

Das "Wunder" der Mathematik:

-

Denke einmal in endlich vielen Denkschritten allgemein!

⇓

Du brauchst in beliebig ("unendlich") vielen konkreten Situationen nicht mehr zu denken.

- **Mit anderen Worten:**

Einmal allgemein denken

⇓

in allen Anwendungen genügt "Rechnen".

Das Rechnen überlassen wir den Pferden (heute den Computern), denn ...

Der Computer ist selbst das Produkt von (sehr gründlichem und allgemeinen) mathematischen Denken!

Wie automatisiert man das allgemeine Denken?

Zahlen sprechen konkret über reale Gegenstände.

Gleichheiten wie a . (b+c) = a.b + a.c sprechen allgemein über (bzw. bearbeiten) Zahlen.

Die Theorie der "Polynome" spricht über (bearbeitet) Gleichheiten.

Beispiele von Polynomen:

$$a.b + a.c$$

$$a^2.b + 23\,a.c - 17\,a.c^2$$

Zwei fundamentale Fragen über Polynome:

Sind zwei Polynome "für alle" Werte der "Variablen" gleich?

Finde (alle) Werte der Variablen, für welche gegebene Polynome 0 werden?

Die zweite Frage ist die (viel) schwierigere. Millionen von Anwendungen in allen Wissenschaften. (Beispiele: Vortrag von H. Hauser! Robotik: Welche Steuerung an den Gelenken, um gewünschten Punkt anzufahren? U.v.a.)

Beispiel:

$$S = \mathrm{Solve}[\{a^2 b + 2\,a\,c + b\,c^2 == 0,\ a\,b^2 - a + c + 1 == 0,\ b^2 + 2\,a - c == 0\}]$$

$$\Big\{\{c \to -1,\ a \to -1,\ b \to -1\},$$

$$\Big\{c \to \left(-\frac{13}{41} - \frac{6\,i}{41}\right) - \left(\frac{8}{41} + \frac{10\,i}{41}\right)\sqrt{2},\ a \to \left(-\frac{4}{41} - \frac{5\,i}{41}\right)\left((-1 + 2\,i) + \sqrt{2}\right),$$

$$b \to -i\Big\},\ \Big\{c \to \left(-\frac{13}{41} + \frac{6\,i}{41}\right) - \left(\frac{8}{41} - \frac{10\,i}{41}\right)\sqrt{2},$$

$$a \to \left(-\frac{4}{41} + \frac{5\,i}{41}\right)\left((-1 - 2\,i) + \sqrt{2}\right),\ b \to i\Big\},$$

$$\Big\{c \to \left(-\frac{13}{41} + \frac{6\,i}{41}\right) + \left(\frac{8}{41} - \frac{10\,i}{41}\right)\sqrt{2},\ a \to \left(\frac{4}{41} - \frac{5\,i}{41}\right)\left((1 + 2\,i) + \sqrt{2}\right),\ b \to i\Big\},$$

$$\Big\{c \to \left(-\frac{13}{41} - \frac{6\,i}{41}\right) + \left(\frac{8}{41} + \frac{10\,i}{41}\right)\sqrt{2},\ a \to \left(\frac{4}{41} + \frac{5\,i}{41}\right)\left((1 - 2\,i) + \sqrt{2}\right),$$

$$b \to -i\Big\},\ \Big\{c \to -\frac{1}{4} - \frac{5}{16\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{(153+i\sqrt{591})^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{20}{(3\,(153+i\sqrt{591}))^{1/3}}}} -$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{\left(153 + i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{20}{\left(3\left(153 + i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}} +$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{\left(18 - \frac{4\left(153 + i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}} - \frac{80}{\left(3\left(153 + i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}} -\right.}$$

$$\left.\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{(153+i\sqrt{591})^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{20}{(3\,(153+i\sqrt{591}))^{1/3}}}}\right) -$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{\left(153 + i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{20}{\left(3\left(153 + i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}$$

$$\sqrt{\left(18 - \frac{4\left(153 + i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}} - \frac{80}{\left(3\left(153 + i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}} -\right.}$$

$$\left.\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{(153+i\sqrt{591})^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{20}{(3\,(153+i\sqrt{591}))^{1/3}}}}\right),\ a \to -1,$$

$$b \to \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{\left(153 + i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{20}{\left(3\left(153 + i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}} +$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left(18-\frac{4\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}-\frac{80}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}-\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)}\Bigg\},$$

$$\Bigg\{c\to-\frac{1}{4}-\frac{5}{16\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}-$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}-$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{\left(18-\frac{4\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}-\frac{80}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}-\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)}+$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}$$

$$\sqrt{\left(18-\frac{4\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}-\frac{80}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}-\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)},\ a\to-1,$$

$$b\to\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}-$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left(18-\frac{4\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}-\frac{80}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}-\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)}\Big\},$$

$$\Big\{c\to-\frac{1}{4}+\frac{5}{16\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}-\frac{1}{8}\sqrt{\left(18-\frac{4\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}-\frac{80}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)}-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}\sqrt{\left(18-\frac{4\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}-\frac{80}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)},\ a\to-1,$$

$$b\to\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}-$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left(18-\frac{4\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}-\frac{80}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)}\Bigg\},$$

$$\Bigg\{c\to-\frac{1}{4}+\frac{5}{16\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}+$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}+$$

$$\frac{1}{8}\sqrt{\left(18-\frac{4\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}-\frac{80}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)}+$$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}$$

$$\sqrt{\left(18-\frac{4\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}-\frac{80}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}+\frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}}+\frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)},\ a\to-1,$$

$$b \to \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{\left(153 + i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{20}{\left(3\left(153 + i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}} + \frac{1}{4}\sqrt{\left(18 - \frac{4\left(153 + i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}} - \frac{80}{\left(3\left(153 + i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}} + \frac{5}{\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{\left(153+i\sqrt{591}\right)^{1/3}}{3^{2/3}} + \frac{20}{\left(3\left(153+i\sqrt{591}\right)\right)^{1/3}}}}\right)}}\}\}$$

Die Methode (Algorithmus) dahinter:

```
GroebnerBasis[F]
```

$$\{-2 - 9c - 64c^2 - 136c^3 - 144c^4 - 110c^5 - 168c^6 - 216c^7 - 134c^8 - 41c^9,$$
$$-941550 - 1254464b - 8282235c - 18266192c^2 - 16433397c^3 - 14476898c^4 - 22642697c^5 - 25323344c^6 - 14237383c^7 - 3842192c^8,$$
$$605002 - 1254464a + 578635c - 520063c^2 - 23557c^3 + 652985c^4 + 234121c^5 - 2230829c^6 - 1883023c^7 - 855383c^8\}$$

Das Wissen dahinter: Hauptsatz der Theorie der Gröbner-Basen: (BB 1965, ...): Statt die unendlich vielen möglichen Reduktionen von Polynomen bzgl. der gegebenen Polynome zu betrachten, genügt es endlich viele "kritische" zu betrachten.

Die nächste Schichte:

Zahlen sprechen konkret über reale Gegenstände.

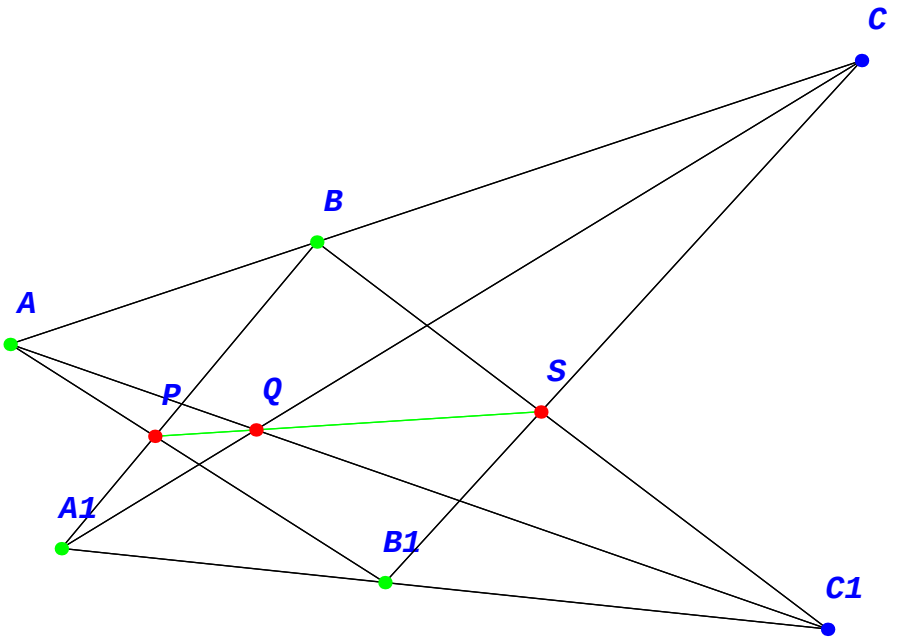
Gleichheiten wie a . (b+c) = a.b + a.c sprechen allgemein über (bzw. bearbeiten) Zahlen.

Die Theorie der "Polynome" spricht über (bearbeitet) Gleichheiten.

Das Rechnen von Gröbner-Basen kann im Gebiet der Geometrie dazu benutzt werden, um das Beweisen geometrischer Sätze völlig zu automatisieren:

Beispiel einer Anwendung: Pappus Theorem

Graphisch



Seien A,B, C und A1,B1, C1 auf zwei Geraden und seien P = AB1 ⋂ A1B, Q = AC1 ⋂ A1C, S = BC1 ⋂ B1C. Dann sind P, Q, und S kollinear.

In der Sprache der Geometrie (Dissertation Dr. Judit Robu)

```
Proposition["Pappus", any[A, B, A1, B1, C, C1, P, Q, S],
 point[A, B, A1, B1] ∧ pon[C, line[A, B]] ∧ pon[C1, line[A1, B1]] ∧ inter[P,
    line[A, B1], line[A1, B]] ∧ inter[Q, line[A, C1], line[A1, C]] ∧
   inter[S, line[B, C1], line[B1, C]] ⇒ collinear[P, Q, S]]
```

```
Prove[Proposition["Pappus"], by → GeometryProver,
 ProverOptions → {Method -> "GroebnerProver", Refutation → True}]
```

Der automatisch erzeugte Beweis

Prove:

(Proposition (Pappus))

$$\forall_{A,B,A1,B1,C,C1,P,Q,S} (\text{point}[A, B, A1, B1] \wedge \text{pon}[C, \text{line}[A, B]] \wedge \text{pon}[C1, \text{line}[A1, B1]] \wedge \text{inter}[P, \text{line}[A, B1], \text{line}[A1, B]] \wedge \text{inter}[Q, \text{line}[A, C1], \text{line}[A1, C]] \wedge \text{inter}[S, \text{line}[B, C1], \text{line}[B1, C]] \Rightarrow \text{collinear}[P, Q, S])$$

with no assumptions.

To prove the above statement we shall use the Gröbner basis method. First we have to transform the problem into algebraic form.

Algebraic Form:

To transform the geometric problem into algebraic form we have to chose first an orthogonal coordinate system.

Let's have the origin in point A, and points $\{\}$ and $\{B, C\}$ on the two axes.

Using this coordinate system we have the following points:

$$\{\{A, 0, 0\}, \{B, 0, u_1\}, \{A1, u_2, u_3\}, \{B1, u_4, u_5\}, \{C, 0, u_6\}, \{C1, u_7, x_1\}, \{P, x_2, x_3\}, \{Q, x_4, x_5\}, \{S, x_6, x_7\}\}$$

The algebraic form of the given construction is:

(1)

$$\forall_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7} (u_3 u_4 + -u_2 u_5 + -u_3 u_7 + u_5 u_7 + u_2 x_1 + -u_4 x_1 == 0 \wedge u_5 x_2 + -u_4 x_3 == 0 \wedge -u_1 u_2 + u_1 x_2 + -u_3 x_2 + u_2 x_3 == 0 \wedge x_1 x_4 + -u_7 x_5 == 0 \wedge -u_2 u_6 + -u_3 x_4 + u_6 x_4 + u_2 x_5 == 0 \wedge u_1 u_7 + -u_1 x_6 + x_1 x_6 + -u_7 x_7 == 0 \wedge -u_4 u_6 + -u_5 x_6 + u_6 x_6 + u_4 x_7 == 0 \Rightarrow x_3 x_4 + -x_2 x_5 + -x_3 x_6 + x_5 x_6 + x_2 x_7 + -x_4 x_7 == 0)$$

This problem is equivalent to:

(2)

$$\neg \left(\exists_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7} (u_3 u_4 + -u_2 u_5 + -u_3 u_7 + u_5 u_7 + u_2 x_1 + -u_4 x_1 == 0 \wedge u_5 x_2 + -u_4 x_3 == 0 \wedge -u_1 u_2 + u_1 x_2 + -u_3 x_2 + u_2 x_3 == 0 \wedge x_1 x_4 + -u_7 x_5 == 0 \wedge -u_2 u_6 + -u_3 x_4 + u_6 x_4 + u_2 x_5 == 0 \wedge u_1 u_7 + -u_1 x_6 + x_1 x_6 + -u_7 x_7 == 0 \wedge -u_4 u_6 + -u_5 x_6 + u_6 x_6 + u_4 x_7 == 0 \wedge x_3 x_4 + -x_2 x_5 + -x_3 x_6 + x_5 x_6 + x_2 x_7 + -x_4 x_7 \neq 0) \right)$$

To remove the last inequality, we use the well-known Rabinowitsch trick. Let v_0 be a new variable. Then the problem becomes:

(3)

$$\neg \left(\exists_{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, v_0} (u_3 u_4 + -u_2 u_5 + -u_3 u_7 + u_5 u_7 + u_2 x_1 + -u_4 x_1 == 0 \wedge u_5 x_2 + -u_4 x_3 == 0 \wedge -u_1 u_2 + u_1 x_2 + -u_3 x_2 + u_2 x_3 == 0 \wedge x_1 x_4 + -u_7 x_5 == 0 \wedge -u_2 u_6 + -u_3 x_4 + u_6 x_4 + u_2 x_5 == 0 \wedge u_1 u_7 + -u_1 x_6 + x_1 x_6 + -u_7 x_7 == 0 \wedge -u_4 u_6 + -u_5 x_6 + u_6 x_6 + u_4 x_7 == 0 \wedge 1 + -v_0 (x_3 x_4 + -x_2 x_5 + -x_3 x_6 + x_5 x_6 + x_2 x_7 + -x_4 x_7) == 0) \right)$$

To prove this statement we have to compute the Gröbner bases of the above polynomials.

The polynomials of the Gröbner bases are: {1}

As the obtained Gröbner bases is {1} the statement is generically true.

Statistics:

The length of the Gröbner bases is 1.

Time needed to compute the Gröbner bases: 0.42 Seconds.

Also: Mathematik ist "vielschichtig"

- Die Automatisierung der Mathematik geschieht auf immer höheren Schichten.
- Mathematik führt zur Trivialisierung von Mathematik.
- Jüngstes Resultat: Gröbner-Basen-Algorithmus wurde durch ein neues Algorithmen-Synthese-Verfahren (BB 2004) automatisch synthetisiert und bewiesen ...
- Glücklicherweise: Je mehr Mathematik durch mehr Mathematik trivialisiert wird, um so mehr nicht trivialisierte Mathematik tut sich auf.

Mathematik als Kunst des effizienten Handels ist im Zentrum des Computer-Zeitalters

Beispiel: Mathematik ⟶ Logik ⟶ Computer ⟶ Anwendungen

Beispiel: Softwarepark Hagenberg, siehe .ppt File.

Das Management von Bootstrapping-Prozessen ist vielschichtige "Mathematik".

Antwort auf die Fragen

Ist Mathematik das Hobby bleicher Exzentriker oder Schlüsseltechnologie des technischen Zeitalters?

Ist Mathematik eine Orchideen-Wissenschaft oder wirtschaftliche Zukunftssicherung für Österreich?

Gehört Österreichs Mathematik zur Weltspitze oder rangiert sie unter “ferner liefen”?

Sollen Politiker, Priester, Manager und Ärzte Mathematik lernen?

Ist Mathematik cool für Internetgeneration und Jetset?

Literatur zum Vortrag

- **On Gröbner Bases**

[Buchberger 1970]
B. Buchberger. Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems (An Algorithmical Criterion for the Solvability of Algebraic Systems of Equations). Aequationes mathematicae 4/3, 1970, pp. 374-383. (English translation in: [Buchberger, Winkler 1998], pp. 535 -545.) Published version of the PhD Thesis of B. Buchberger, University of Innsbruck, Austria, 1965.

[Buchberger 1998]
B. Buchberger. Introduction to Gröbner Bases. In: [Buchberger, Winkler 1998], pp.3-31.

[Buchberger, Winkler, 1998]
B. Buchberger, F. Winkler (eds.). Gröbner Bases and Applications, Proceedings of the International Conference "33 Years of Gröbner Bases", 1998, RISC, Austria, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 251, Cambridge University Press, 1998.

[Becker, Weispfenning 1993]
T. Becker, V. Weispfenning. Gröbner Bases: A Computational Approach to Commutative Algebra, Springer, New York, 1993.

- **On Mathematical Knowledge Management**

B. Buchberger, G. Gonnet, M. Hazewinkel (eds.)
Mathematical Knowledge Management.
Special Issue of Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Vol. 38, No. 1-3, May 2003, Kluwer Academic Publisher, 232 pages.

A.Asperti, B. Buchberger, J.H.Davenport (eds.)
Mathematical Knowledge Management.
Proceedings of the Second International Conference on Mathematical Knowledge Management (MKM 2003), Bertinoro, Italy, Feb.16-18, 2003, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2594, Springer, Berlin-Heidelberg-NewYork, 2003, 223 pages.

A.Asperti, G.Bancerek, A.Trybulec (eds.).
Proceedings of the Third International Conference on Mathematical Knowledge Management, MKM 2004, Bialowieza, Poland, September 19-21, 2004, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 3119, Springer, Berlin-Heidelberg-NewYork, 2004

On Theorema

[Buchberger et al. 2000]
B. Buchberger, C. Dupre, T. Jebelean, F. Kriftner, K. Nakagawa, D. Vasaru, W. Windsteiger. The Theorema Project: A Progress Report. In: M. Kerber and M. Kohlhase (eds.), Symbolic Computation and Automated Reasoning (Proceedings of CALCULEMUS 2000, Symposium on the Integration of Symbolic Computation and Mechanized Reasoning, August 6-7, 2000, St. Andrews, Scotland), A.K. Peters, Natick, Massachusetts, ISBN 1-56881-145-4, pp. 98-113.

On Theory Exploration and Algorithm Synthesis

[Buchberger 2000]
B. Buchberger. Theory Exploration with *Theorema*.
Analele Universitatii Din Timisoara, Ser. Matematica-Informatica, Vol. XXXVIII, Fasc.2, 2000, (Proceedings of SYNASC 2000, 2nd International Workshop on Symbolic and Numeric Algorithms in Scientific Computing, Oct. 4-6, 2000, Timisoara, Rumania, T. Jebelean, V. Negru, A. Popovici eds.), ISSN 1124-970X, pp. 9-32.

[Buchberger 2003]
B. Buchberger. Algorithm Invention and Verification by Lazy Thinking.
In: D. Petcu, V. Negru, D. Zaharie, T. Jebelean (eds), Proceedings of SYNASC 2003 (Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing, Timisoara, Romania, October 1–4, 2003), Mirton Publishing, ISBN 973–661–104–3, pp. 2–26.

[Buchberger, Craciun 2003]
B. Buchberger, A. Craciun. Algorithm Synthesis by Lazy Thinking: Examples and Implementation in Theorema. in: Fairouz Kamareddine (ed.), Proc. of the Mathematical Knowledge Management Workshop, Edinburgh, Nov. 25, 2003, Electronic Notes on Theoretical Computer Science, volume dedicated to the MKM 03 Symposium, Elsevier, ISBN 044451290X, to appear.

[Buchberger 2004]
B. Buchberger.
Towards the Automated Synthesis of a Gröbner Bases Algorithm.
RACSAM (Review of the Royal Spanish Academy of Science), Vol. 98/1, to appear, 10 pages.