

Computer-Mathematik: Abstieg oder Aufstieg?

Bruno Buchberger
Research Institute for Symbolic Computation
Johannes Kepler Universität, Linz, Österreich

Vortrag am 23. Mai 2002
am Institut für Wissenschaftliches Rechnen (IWR) in Heidelberg

Copyright Bruno Buchberger: Copying is permitted under the condition that

- the file is kept unchanged
- in particular, the copyright note is included, and
- a note is sent to buchberger@risc.uni-linz.ac.at

■ Computer-Mathematik: Mathematik auf Knopfdruck

■ Mathematik als Trauma

■ Die Überwindung des Schultraumas

$N[\sqrt{2}]$

1.41421

"Numerisch" rechnen! Am Taschenrechner.

$N[\sqrt{2}, 200]$

1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247846210703885038753432764157:
27350138462309122970249248360558507372126441214970999358314132226659275055927557999505011527820605:
715

"Numerisch" rechnen! In einem mathematischen Software-System.

$$3/17 + 15/7$$

$$\frac{276}{119}$$

"Algebraisch" rechnen? In einem mathematischen Software-System mit "Computer-Algebra".

$$\text{Simplify}[\sqrt{2} + 3/\sqrt{2}]$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$D[\text{Sin}[\sqrt{x - E^x}] x^2, x]$$

$$\frac{(1 - e^x) x^2 \text{Cos}[\sqrt{-e^x + x}]}{2 \sqrt{-e^x + x}} + 2 x \text{Sin}[\sqrt{-e^x + x}]$$

"Symbolisch" rechnen? In einem mathematischen Software-System.

In mathematischen Software-Systeme wie Mathematica, Derive, Maple, Magma, Macsyma etc. kann man heute numerisch, algebraisch, symbolisch, graphisch rechnen.

Symbolic Computation \supseteq Algebraic Computation \supseteq Numeric Computation.

■ Die Überwindung des Universitätstraumas

$$\text{DSolve}[\{y[x] == -z'[x], z[x] == -y'[x]\}, \{y, z\}, x]$$

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow \left(\frac{1}{2} e^{-\#1} (C[1] + e^{2\#1} C[1] + C[2] - e^{2\#1} C[2]) \& \right), z \rightarrow \left(-\frac{1}{2} e^{-\#1} (-C[1] + e^{2\#1} C[1] - C[2] - e^{2\#1} C[2]) \& \right) \right\} \right\}$$

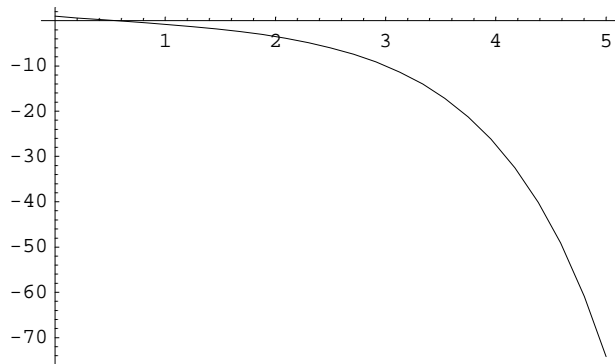
Symbolisch rechnen.

$$\text{sol} = \text{DSolve}[\{y[x] == -z'[x], z[x] == -y'[x], y[0] == 1, z[0] == 2\}, \{y, z\}, x]$$

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow \left(-\frac{1}{2} e^{-\#1} (-3 + e^{2\#1}) \& \right), z \rightarrow \left(\frac{1}{2} e^{-\#1} (3 + e^{2\#1}) \& \right) \right\} \right\}$$

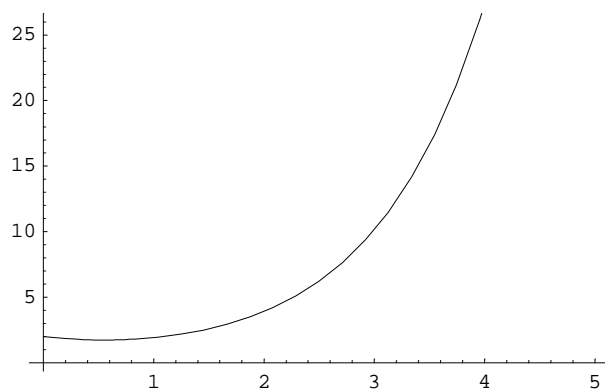
Numerisch auswerten:

```
Plot[(y /. sol[[1, 1]])[x], {x, 0, 5}]
```



• Graphics •

```
Plot[(z /. sol[[1, 2]])[x], {x, 0, 5}]
```



• Graphics •

Packages verwenden, z.B. für Wavelet-Transformationen: siehe Bilder.

Woher kommen gute Wavelet-Funktionen?

F. Chazak, P. Paule, O. Scherzer, A. Schoisswohl, B. Zimmermann.

The Construction of Orthonormal Wavelets Using Symbolic Methods and a Matrix Analytic Approach for Wavelets on the Interval. Erscheint in *Experimental Mathematics*.

Algebraisch rechnen mit "Gröbner Basen": N algebraische Gleichungen in N Unbekannten Q_0, \dots, Q_{N-1} :

Clear[W]

$$W[N_, 0] := \sum_{j=0}^{N-1} \frac{Q_j}{2^j} - \frac{1}{2^{2N-2}};$$

$$W[N_, 1] := \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \text{Binomial}[4N - i - j - 2, 2N + 2i - 1] Q_i Q_j$$

Table[W[1, 1], {1, 0, 0}]

{-1 + Q₀}

Table[W[2, 1], {1, 0, 1}]

$$\left\{-\frac{1}{4} + Q_0 + \frac{Q_1}{2}, 6Q_0^2 + 6Q_0Q_1 + Q_1^2\right\}$$

W3 = Table[W[3, 1], {1, 0, 2}]

$$\left\{-\frac{1}{16} + Q_0 + \frac{Q_1}{2} + \frac{Q_2}{4}, 120Q_0^2 + 120Q_0Q_1 + 28Q_1^2 + 64Q_0Q_2 + 28Q_1Q_2 + 6Q_2^2, 10Q_0^2 + 10Q_0Q_1 + Q_1^2 + 8Q_0Q_2 + Q_1Q_2\right\}$$

GroebnerBasis[W3, {Q₂, Q₁, Q₀}]

$$\{-9 + 96Q_0 + 1536Q_0^2 + 4096Q_0^3 - 16384Q_0^4, -21Q_0 - 32Q_0^2 + 128Q_0^3 - 3Q_1, 3 + 120Q_0 + 256Q_0^2 - 1024Q_0^3 - 12Q_2\}$$

Solve[-9 + 96 Q₀ + 1536 Q₀² + 4096 Q₀³ - 16384 Q₀⁴ == 0, Q₀]

$$\left\{\left\{Q_0 \rightarrow \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} - \frac{1}{2}i \sqrt{-\frac{5}{64} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{16}}\right\}, \left\{Q_0 \rightarrow \frac{1}{16} - \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} + \frac{1}{2}i \sqrt{-\frac{5}{64} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{16}}\right\}, \left\{Q_0 \rightarrow \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{64} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{16}}\right\}, \left\{Q_0 \rightarrow \frac{1}{16} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{8} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{64} + \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{16}}\right\}\right\}$$

N[%]

$$\{\{Q_0 \rightarrow -0.135142 - 0.0719308i\}, \{Q_0 \rightarrow -0.135142 + 0.0719308i\}, \{Q_0 \rightarrow 0.0498175\}, \{Q_0 \rightarrow 0.470467\}\}$$

W5 = Table[W[5, 1], {1, 0, 4}]

$$\left\{ -\frac{1}{256} + Q_0 + \frac{Q_1}{2} + \frac{Q_2}{4} + \frac{Q_3}{8} + \frac{Q_4}{16}, 31824 Q_0^2 + 31824 Q_0 Q_1 + 8008 Q_1^2 + 15808 Q_0 Q_2 + 8008 Q_1 Q_2 + 2002 Q_2^2 + 7800 Q_0 Q_3 + 4004 Q_1 Q_3 + 2002 Q_2 Q_3 + 495 Q_3^2 + 3796 Q_0 Q_4 + 2002 Q_1 Q_4 + 1012 Q_2 Q_4 + 495 Q_3 Q_4 + 120 Q_4^2, 8568 Q_0^2 + 8568 Q_0 Q_1 + 1820 Q_1^2 + 4928 Q_0 Q_2 + 1820 Q_1 Q_2 + 364 Q_2^2 + 3108 Q_0 Q_3 + 1092 Q_1 Q_3 + 364 Q_2 Q_3 + 66 Q_3^2 + 2016 Q_0 Q_4 + 728 Q_1 Q_4 + 232 Q_2 Q_4 + 66 Q_3 Q_4 + 10 Q_4^2, 816 Q_0^2 + 816 Q_0 Q_1 + 120 Q_1^2 + 576 Q_0 Q_2 + 120 Q_1 Q_2 + 14 Q_2^2 + 456 Q_0 Q_3 + 92 Q_1 Q_3 + 14 Q_2 Q_3 + Q_3^2 + 364 Q_0 Q_4 + 78 Q_1 Q_4 + 12 Q_2 Q_4 + Q_3 Q_4, 18 Q_0^2 + 18 Q_0 Q_1 + Q_1^2 + 16 Q_0 Q_2 + Q_1 Q_2 + 15 Q_0 Q_3 + Q_1 Q_3 + 14 Q_0 Q_4 + Q_1 Q_4 \right\}$$

GroebnerBasis[W5, {Q4, Q3, Q2, Q1, Q0}] // Timing

```
{0.28 Second, {-2251875390625 + 131766880000000 Q0 + 5782683648000000 Q0^2 +
  4000515620864000000 Q0^3 - 92455465857843200000 Q0^4 - 15136683834621296640000 Q0^5 +
  321980633234202951680000 Q0^6 + 26004063471614140874752000 Q0^7 - 1518069903629532971139072000 Q0^8 +
  24345747195367204805253529600 Q0^9 + 282223732589035180835156787200 Q0^10 -
  12421567725441961014604993658880 Q0^11 - 71032999454195120173711747973120 Q0^12 +
  2877566862518080741397516276203520 Q0^13 + 38942226439011207213978722469150720 Q0^14 +
  83076749736557242056487941267521536 Q0^15 - 1329227995784915872903807060280344576 Q0^16,
-1017322989596484375 + 7704916161960220000000 Q0 + 79194408634955264000000 Q0^2 -
  5441183911997603840000000 Q0^3 - 145618333689776072294400000 Q0^4 +
  8242929670202210606120960000 Q0^5 + 168406845874174690068529152000 Q0^6 -
  17649128777477534740786446336000 Q0^7 + 340933536983883671921366138880000 Q0^8 +
  3024581883191018072127740628172800 Q0^9 - 162507377441829684596009992066170880 Q0^10 -
  902661968847987155401497391734456320 Q0^11 + 35216824630754427496300799427073802240 Q0^12 +
  471175959272394859743499297469182771200 Q0^13 + 954530882461512535401828083705992708096 Q0^14 -
  15855280763971686203722780078847752667136 Q0^15 + 605314156930560000000 Q1,
8941207316089453125 - 38039082417697200000000 Q0 - 852171960398556672000000 Q0^2 +
  47683069079045773721600000 Q0^3 + 2213045080687964376268800000 Q0^4 -
  98534422909480576651100160000 Q0^5 - 2336076953797332961555644416000 Q0^6 +
  223152569109682742364695691264000 Q0^7 - 4256674981293661042816409665536000 Q0^8 -
  37013636891048134858979327292211200 Q0^9 + 2039898881186510709422473753751715840 Q0^10 +
  10262261839721027208816513395730677760 Q0^11 - 463960142901097397745100428900690821120 Q0^12 -
  6073651366532926797837884352129914634240 Q0^13 - 11991491104949279875032564572491798806528 Q0^14 +
  204457478397680873245200379334413399359488 Q0^15 + 605314156930560000000 Q2,
-68958263573825390625 + 300529071721983370000000 Q0 + 11027658719776864256000000 Q0^2 -
  460271670898853032755200000 Q0^3 - 34880170188893135862497280000 Q0^4 +
  1156217840976325824028344320000 Q0^5 + 46534310671548030547623149568000 Q0^6 -
  3436206007725835061611204706304000 Q0^7 + 60807244831229197412695700353843200 Q0^8 +
  598147418984680631955811929056870400 Q0^9 - 29919934701646299078929780434083512320 Q0^10 -
  157019556715316049550239553239992238080 Q0^11 + 6900434798369027280654178324692724613120 Q0^12 +
  91362552223871199937305664129257449717760 Q0^13 + 186008434253551885834440843896128823885824 Q0^14 -
  3094089692808606925306495134051758877179904 Q0^15 + 2118599549256960000000 Q3,
-32382032456484375 - 88903071499638046875 Q0 - 4382938009855356000000 Q0^2 +
  143939461728337408000000 Q0^3 + 15218402908902166364160000 Q0^4 -
  413265551131244840878080000 Q0^5 - 23110417498015018094952448000 Q0^6 +
  1506552433837174255276523520000 Q0^7 - 25414481164735753920369288806400 Q0^8 -
  270877916982967287608483669606400 Q0^9 + 12724251290856775353207815374110720 Q0^10 +
  69475135938310141522830200961761280 Q0^11 - 2944424249213002472575771672135598080 Q0^12 -
  39377454607922045730716948742128271360 Q0^13 - 81982548915744390770481878594154921984 Q0^14 +
  1338679882613952002444752414641146036224 Q0^15 + 752343589935000000 Q4}}
```

```
Solve[-2251875390625 + 13176688000000 Q0 + 5782683648000000 Q02 +
4000515620864000000 Q03 - 92455465857843200000 Q04 - 15136683834621296640000 Q05 +
321980633234202951680000 Q06 + 26004063471614140874752000 Q07 - 1518069903629532971139072000 Q08 +
24345747195367204805253529600 Q09 + 282223732589035180835156787200 Q010 -
12421567725441961014604993658880 Q011 - 71032999454195120173711747973120 Q012 +
2877566862518080741397516276203520 Q013 + 38942226439011207213978722469150720 Q014 +
83076749736557242056487941267521536 Q015 - 1329227995784915872903807060280344576 Q016 == 0, Q0]
```

```
{Q0 → Root[2251875390625 - 13176688000000 #1 - 5782683648000000 #12 - 4000515620864000000 #13 +
92455465857843200000 #14 + 15136683834621296640000 #15 - 321980633234202951680000 #16 -
26004063471614140874752000 #17 + 1518069903629532971139072000 #18 -
24345747195367204805253529600 #19 - 282223732589035180835156787200 #110 +
12421567725441961014604993658880 #111 + 71032999454195120173711747973120 #112 -
2877566862518080741397516276203520 #113 - 38942226439011207213978722469150720 #114 -
83076749736557242056487941267521536 #115 + 1329227995784915872903807060280344576 #116 &, 1]},
{Q0 → Root[2251875390625 - 13176688000000 #1 - 5782683648000000 #12 - 4000515620864000000 #13 +
92455465857843200000 #14 + 15136683834621296640000 #15 - 321980633234202951680000 #16 -
26004063471614140874752000 #17 + 1518069903629532971139072000 #18 -
24345747195367204805253529600 #19 - 282223732589035180835156787200 #110 +
12421567725441961014604993658880 #111 + 71032999454195120173711747973120 #112 -
2877566862518080741397516276203520 #113 - 38942226439011207213978722469150720 #114 -
83076749736557242056487941267521536 #115 + 1329227995784915872903807060280344576 #116 &, 2]},
{Q0 → Root[2251875390625 - 13176688000000 #1 - 5782683648000000 #12 - 4000515620864000000 #13 +
92455465857843200000 #14 + 15136683834621296640000 #15 - 321980633234202951680000 #16 -
26004063471614140874752000 #17 + 1518069903629532971139072000 #18 -
24345747195367204805253529600 #19 - 282223732589035180835156787200 #110 +
12421567725441961014604993658880 #111 + 71032999454195120173711747973120 #112 -
2877566862518080741397516276203520 #113 - 38942226439011207213978722469150720 #114 -
83076749736557242056487941267521536 #115 + 1329227995784915872903807060280344576 #116 &, 3]},
{Q0 → Root[2251875390625 - 13176688000000 #1 - 5782683648000000 #12 - 4000515620864000000 #13 +
92455465857843200000 #14 + 15136683834621296640000 #15 - 321980633234202951680000 #16 -
26004063471614140874752000 #17 + 1518069903629532971139072000 #18 -
24345747195367204805253529600 #19 - 282223732589035180835156787200 #110 +
12421567725441961014604993658880 #111 + 71032999454195120173711747973120 #112 -
2877566862518080741397516276203520 #113 - 38942226439011207213978722469150720 #114 -
83076749736557242056487941267521536 #115 + 1329227995784915872903807060280344576 #116 &, 4]},
{Q0 → Root[2251875390625 - 13176688000000 #1 - 5782683648000000 #12 - 4000515620864000000 #13 +
92455465857843200000 #14 + 15136683834621296640000 #15 - 321980633234202951680000 #16 -
26004063471614140874752000 #17 + 1518069903629532971139072000 #18 -
24345747195367204805253529600 #19 - 282223732589035180835156787200 #110 +
12421567725441961014604993658880 #111 + 71032999454195120173711747973120 #112 -
2877566862518080741397516276203520 #113 - 38942226439011207213978722469150720 #114 -
83076749736557242056487941267521536 #115 + 1329227995784915872903807060280344576 #116 &, 5]},
{Q0 → Root[2251875390625 - 13176688000000 #1 - 5782683648000000 #12 - 4000515620864000000 #13 +
92455465857843200000 #14 + 15136683834621296640000 #15 - 321980633234202951680000 #16 -
26004063471614140874752000 #17 + 1518069903629532971139072000 #18 -
24345747195367204805253529600 #19 - 282223732589035180835156787200 #110 +
12421567725441961014604993658880 #111 + 71032999454195120173711747973120 #112 -
2877566862518080741397516276203520 #113 - 38942226439011207213978722469150720 #114 -
83076749736557242056487941267521536 #115 + 1329227995784915872903807060280344576 #116 &, 6]},
```



```

26004063471614140874752000 #17 + 1518069903629532971139072000 #18 -
24345747195367204805253529600 #19 - 282223732589035180835156787200 #110 +
12421567725441961014604993658880 #111 + 71032999454195120173711747973120 #112 -
2877566862518080741397516276203520 #113 - 38942226439011207213978722469150720 #114 -
83076749736557242056487941267521536 #115 + 1329227995784915872903807060280344576 #116 &, 14]],
{Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 5782683648000000 #12 - 4000515620864000000 #13 +
92455465857843200000 #14 + 15136683834621296640000 #15 - 321980633234202951680000 #16 -
26004063471614140874752000 #17 + 1518069903629532971139072000 #18 -
24345747195367204805253529600 #19 - 282223732589035180835156787200 #110 +
12421567725441961014604993658880 #111 + 71032999454195120173711747973120 #112 -
2877566862518080741397516276203520 #113 - 38942226439011207213978722469150720 #114 -
83076749736557242056487941267521536 #115 + 1329227995784915872903807060280344576 #116 &, 15]],
{Q0 → Root[2251875390625 - 131766880000000 #1 - 5782683648000000 #12 - 4000515620864000000 #13 +
92455465857843200000 #14 + 15136683834621296640000 #15 - 321980633234202951680000 #16 -
26004063471614140874752000 #17 + 1518069903629532971139072000 #18 -
24345747195367204805253529600 #19 - 282223732589035180835156787200 #110 +
12421567725441961014604993658880 #111 + 71032999454195120173711747973120 #112 -
2877566862518080741397516276203520 #113 - 38942226439011207213978722469150720 #114 -
83076749736557242056487941267521536 #115 + 1329227995784915872903807060280344576 #116 &, 16]]}

```

```

NSolve[-2251875390625 + 131766880000000 Q0 + 57826836480000000 Q02 +
4000515620864000000 Q03 - 92455465857843200000 Q04 - 15136683834621296640000 Q05 +
321980633234202951680000 Q06 + 26004063471614140874752000 Q07 - 1518069903629532971139072000 Q08 +
24345747195367204805253529600 Q09 + 282223732589035180835156787200 Q010 -
12421567725441961014604993658880 Q011 - 71032999454195120173711747973120 Q012 +
2877566862518080741397516276203520 Q013 + 38942226439011207213978722469150720 Q014 +
83076749736557242056487941267521536 Q015 - 1329227995784915872903807060280344576 Q016 == 0, Q0]

```

```

{{Q0 → -0.0763461 - 0.0206812 i}, {Q0 → -0.0763461 + 0.0206812 i}, {Q0 → -0.0627296 - 0.0694059 i},
{Q0 → -0.0627296 + 0.0694059 i}, {Q0 → -0.013034 - 0.00353075 i}, {Q0 → -0.013034 + 0.00353075 i},
{Q0 → -0.00765551 - 0.00847029 i}, {Q0 → -0.00765551 + 0.00847029 i}, {Q0 → 0.00471743},
{Q0 → 0.0148122 - 0.0291327 i}, {Q0 → 0.0148122 + 0.0291327 i}, {Q0 → 0.0274913 - 0.0176732 i},
{Q0 → 0.0274913 + 0.0176732 i}, {Q0 → 0.0276322}, {Q0 → 0.0386548}, {Q0 → 0.226419}}

```

W6 = Table[W[6, 1], {1, 0, 5}]

$$\left\{ -\frac{1}{1024} + Q_0 + \frac{Q_1}{2} + \frac{Q_2}{4} + \frac{Q_3}{8} + \frac{Q_4}{16} + \frac{Q_5}{32}, \right. \\
497420 Q_0^2 + 497420 Q_0 Q_1 + 125970 Q_1^2 + 245480 Q_0 Q_2 + 125970 Q_1 Q_2 + 31824 Q_2^2 + 119510 Q_0 Q_3 + \\
62322 Q_1 Q_3 + 31824 Q_2 Q_3 + 8008 Q_3^2 + 57188 Q_0 Q_4 + 30498 Q_1 Q_4 + 15808 Q_2 Q_4 + 8008 Q_3 Q_4 + \\
2002 Q_4^2 + 26690 Q_0 Q_5 + 14690 Q_1 Q_5 + 7800 Q_2 Q_5 + 4004 Q_3 Q_5 + 2002 Q_4 Q_5 + 495 Q_5^2, \\
170544 Q_0^2 + 170544 Q_0 Q_1 + 38760 Q_1^2 + 93024 Q_0 Q_2 + 38760 Q_1 Q_2 + 8568 Q_2^2 + 54264 Q_0 Q_3 + \\
21624 Q_1 Q_3 + 8568 Q_2 Q_3 + 1820 Q_3^2 + 32640 Q_0 Q_4 + 13056 Q_1 Q_4 + 4928 Q_2 Q_4 + 1820 Q_3 Q_4 + \\
364 Q_4^2 + 19584 Q_0 Q_5 + 8128 Q_1 Q_5 + 3108 Q_2 Q_5 + 1092 Q_3 Q_5 + 364 Q_4 Q_5 + 66 Q_5^2, \\
26334 Q_0^2 + 26334 Q_0 Q_1 + 4845 Q_1^2 + 16644 Q_0 Q_2 + 4845 Q_1 Q_2 + 816 Q_2^2 + 11799 Q_0 Q_3 + \\
3213 Q_1 Q_3 + 816 Q_2 Q_3 + 120 Q_3^2 + 8586 Q_0 Q_4 + 2397 Q_1 Q_4 + 576 Q_2 Q_4 + \\
120 Q_3 Q_4 + 14 Q_4^2 + 6189 Q_0 Q_5 + 1821 Q_1 Q_5 + 456 Q_2 Q_5 + 92 Q_3 Q_5 + 14 Q_4 Q_5 + Q_5^2, \\
1540 Q_0^2 + 1540 Q_0 Q_1 + 190 Q_1^2 + 1160 Q_0 Q_2 + 190 Q_1 Q_2 + 18 Q_2^2 + 970 Q_0 Q_3 + 154 Q_1 Q_3 + 18 Q_2 Q_3 + \\
Q_3^2 + 816 Q_0 Q_4 + 136 Q_1 Q_4 + 16 Q_2 Q_4 + Q_3 Q_4 + 680 Q_0 Q_5 + 120 Q_1 Q_5 + 15 Q_2 Q_5 + Q_3 Q_5, \\
22 Q_0^2 + 22 Q_0 Q_1 + Q_1^2 + 20 Q_0 Q_2 + Q_1 Q_2 + 19 Q_0 Q_3 + Q_1 Q_3 + 18 Q_0 Q_4 + Q_1 Q_4 + 17 Q_0 Q_5 + Q_1 Q_5 \left. \right\}$$

GroebnerBasis[W6, {Q5, Q4, Q3, Q2, Q1, Q0}]; // Timing

{5.98 Second, Null}

W7 = Table[W[7, 1], {1, 0, 6}]

$$\left\{ -\frac{1}{4096} + Q_0 + \frac{Q_1}{2} + \frac{Q_2}{4} + \frac{Q_3}{8} + \frac{Q_4}{16} + \frac{Q_5}{32} + \frac{Q_6}{64}, \right. \\
7726160 Q_0^2 + 7726160 Q_0 Q_1 + 1961256 Q_1^2 + 3803648 Q_0 Q_2 + 1961256 Q_1 Q_2 + 497420 Q_2^2 + 1842392 Q_0 Q_3 + \\
966416 Q_1 Q_3 + 497420 Q_2 Q_3 + 125970 Q_3^2 + 875976 Q_0 Q_4 + 468996 Q_1 Q_4 + 245480 Q_2 Q_4 + 125970 Q_3 Q_4 + \\
31824 Q_4^2 + 406980 Q_0 Q_5 + 223516 Q_1 Q_5 + 119510 Q_2 Q_5 + 62322 Q_3 Q_5 + 31824 Q_4 Q_5 + 8008 Q_5^2 + \\
183464 Q_0 Q_6 + 104006 Q_1 Q_6 + 57188 Q_2 Q_6 + 30498 Q_3 Q_6 + 15808 Q_4 Q_6 + 8008 Q_5 Q_6 + 2002 Q_6^2, \\
3124550 Q_0^2 + 3124550 Q_0 Q_1 + 735471 Q_1^2 + 1653608 Q_0 Q_2 + 735471 Q_1 Q_2 + 170544 Q_2^2 + 918137 Q_0 Q_3 + \\
394383 Q_1 Q_3 + 170544 Q_2 Q_3 + 38760 Q_3^2 + 523754 Q_0 Q_4 + 223839 Q_1 Q_4 + 93024 Q_2 Q_4 + 38760 Q_3 Q_4 + \\
8568 Q_4^2 + 299915 Q_0 Q_5 + 130815 Q_1 Q_5 + 54264 Q_2 Q_5 + 21624 Q_3 Q_5 + 8568 Q_4 Q_5 + 1820 Q_5^2 + \\
169100 Q_0 Q_6 + 76551 Q_1 Q_6 + 32640 Q_2 Q_6 + 13056 Q_3 Q_6 + 4928 Q_4 Q_6 + 1820 Q_5 Q_6 + 364 Q_6^2, \\
657800 Q_0^2 + 657800 Q_0 Q_1 + 134596 Q_1^2 + 388608 Q_0 Q_2 + 134596 Q_1 Q_2 + 26334 Q_2^2 + 254012 Q_0 Q_3 + \\
81928 Q_1 Q_3 + 26334 Q_2 Q_3 + 4845 Q_3^2 + 172084 Q_0 Q_4 + 55594 Q_1 Q_4 + 16644 Q_2 Q_4 + 4845 Q_3 Q_4 + \\
816 Q_4^2 + 116490 Q_0 Q_5 + 38950 Q_1 Q_5 + 11799 Q_2 Q_5 + 3213 Q_3 Q_5 + 816 Q_4 Q_5 + 120 Q_5^2 + \\
77540 Q_0 Q_6 + 27151 Q_1 Q_6 + 8586 Q_2 Q_6 + 2397 Q_3 Q_6 + 576 Q_4 Q_6 + 120 Q_5 Q_6 + 14 Q_6^2, \\
65780 Q_0^2 + 65780 Q_0 Q_1 + 10626 Q_1^2 + 44528 Q_0 Q_2 + 10626 Q_1 Q_2 + 1540 Q_2^2 + 33902 Q_0 Q_3 + 7546 Q_1 Q_3 + \\
1540 Q_2 Q_3 + 190 Q_3^2 + 26356 Q_0 Q_4 + 6006 Q_1 Q_4 + 1160 Q_2 Q_4 + 190 Q_3 Q_4 + 18 Q_4^2 + 20350 Q_0 Q_5 + 4846 Q_1 Q_5 + \\
970 Q_2 Q_5 + 154 Q_3 Q_5 + 18 Q_4 Q_5 + Q_5^2 + 15504 Q_0 Q_6 + 3876 Q_1 Q_6 + 816 Q_2 Q_6 + 136 Q_3 Q_6 + 16 Q_4 Q_6 + Q_5 Q_6, \\
2600 Q_0^2 + 2600 Q_0 Q_1 + 276 Q_1^2 + 2048 Q_0 Q_2 + 276 Q_1 Q_2 + 22 Q_2^2 + 1772 Q_0 Q_3 + 232 Q_1 Q_3 + \\
22 Q_2 Q_3 + Q_3^2 + 1540 Q_0 Q_4 + 210 Q_1 Q_4 + 20 Q_2 Q_4 + Q_3 Q_4 + 1330 Q_0 Q_5 + \\
190 Q_1 Q_5 + 19 Q_2 Q_5 + Q_3 Q_5 + 1140 Q_0 Q_6 + 171 Q_1 Q_6 + 18 Q_2 Q_6 + Q_3 Q_6, \\
26 Q_0^2 + 26 Q_0 Q_1 + Q_1^2 + 24 Q_0 Q_2 + Q_1 Q_2 + 23 Q_0 Q_3 + Q_1 Q_3 + 22 Q_0 Q_4 + Q_1 Q_4 + 21 Q_0 Q_5 + Q_1 Q_5 + 20 Q_0 Q_6 + Q_1 Q_6 \left. \right\}$$

```
GroebnerBasis[W7, {Q6, Q5, Q4, Q3, Q2, Q1, Q0}]; // Timing
```

```
$Aborted
```

Kann man darüber etwas beweisen? Laden Sie ein anderes Package!

■ Die Überwindung des Intelligenztraumas

Initialisierung von *Theorema* :

```
Needs["Theorema`"];
```

Beispiel eines computer-generierten Beweises:

Definition["limit",

$$\forall_{f,a} \text{limit}[f, a] \iff \forall_{\epsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n \geq N} |f[n] - a| < \epsilon]$$

Proposition["limit of sum", any[f, a, g, b],

$$(\text{limit}[f, a] \wedge \text{limit}[g, b]) \implies \text{limit}[f + g, a + b]$$

Definition["+:", any[f, g, x],

$$(f + g)[x] = f[x] + g[x]$$

Lemma["|+", any[x, y, a, b, δ , ϵ],

$$(|(x + y) - (a + b)| < (\delta + \epsilon)) \iff (|x - a| < \delta \wedge |y - b| < \epsilon)$$

Lemma["max", any[m, M1, M2],

$$m \geq \max[M1, M2] \implies (m \geq M1 \wedge m \geq M2)$$

Theory["limit",

Definition["limit"]

Definition["+:"]

Lemma["|+"]

Lemma["max"]

The PCS prover: A heuristic proof method (by Bruno Buchberger 2000) for predicate logic.

Generates "natural" proofs.

For formulae with alternating quantifiers.

The proof of the above theorem (and hundreds of other theorems in analysis) can now be generated completely automatically by calling the PCS prover:

Prove[Proposition["limit of sum"], using \rightarrow Theory["limit"], by \rightarrow PCS]

The proof generated completely automatically by the above call of the PCS algorithm is shown below:

 Prove:

(Proposition (limit of sum)) $\forall_{f,a,g,b} (\text{limit}[f, a] \wedge \text{limit}[g, b] \Rightarrow \text{limit}[f + g, a + b]),$

under the assumptions:

(Definition (limit:)) $\forall_{f,a} \left(\text{limit}[f, a] \Leftrightarrow \forall_{\epsilon > 0} \exists N \forall_{n \geq N} (|f[n] - a| < \epsilon) \right),$

(Definition (+:)) $\forall_{f,g,x} ((f + g)[x] = f[x] + g[x]),$

(Lemma (+)) $\forall_{x,y,a,b,\delta,\epsilon} (|(x + y) - (a + b)| < \delta + \epsilon \Leftrightarrow (|x - a| < \delta \wedge |y - b| < \epsilon)),$

(Lemma (max)) $\forall_{m,M1,M2} (m \geq \max[M1, M2] \Rightarrow m \geq M1 \wedge m \geq M2).$

We assume

(1) $\text{limit}[f_0, a_0] \wedge \text{limit}[g_0, b_0],$

and show

(2) $\text{limit}[f_0 + g_0, a_0 + b_0].$

Formula (1.1), by (Definition (limit:)), implies:

(3) $\forall_{\epsilon > 0} \exists N \forall_{n \geq N} (|f_0[n] - a_0| < \epsilon).$

By (3), we can take an appropriate Skolem function such that

(4) $\forall_{\epsilon > 0} \forall_{n \geq N_0[\epsilon]} (|f_0[n] - a_0| < \epsilon),$

Formula (1.2), by (Definition (limit:)), implies:

$$(5) \quad \forall_{\epsilon > 0} \exists N \forall_{n \geq N} (|g_0[n] - b_0| < \epsilon).$$

By (5), we can take an appropriate Skolem function such that

$$(6) \quad \forall_{\epsilon > 0} \forall_{n \geq N_1[\epsilon]} (|g_0[n] - b_0| < \epsilon),$$

Formula (2), using (Definition (limit:)), is implied by:

$$(7) \quad \forall_{\epsilon > 0} \exists N \forall_{n \geq N} (|(f_0 + g_0)[n] - (a_0 + b_0)| < \epsilon).$$

We assume

$$(8) \quad \epsilon_0 > 0,$$

and show

$$(9) \quad \exists N \forall_{n \geq N} (|(f_0 + g_0)[n] - (a_0 + b_0)| < \epsilon_0).$$

We have to find N_2^* such that

$$(10) \quad \forall_n (n \geq N_2^* \Rightarrow |(f_0 + g_0)[n] - (a_0 + b_0)| < \epsilon_0).$$

Formula (10), using (Definition (+:)), is implied by:

$$(11) \quad \forall_n (n \geq N_2^* \Rightarrow |(f_0[n] + g_0[n]) - (a_0 + b_0)| < \epsilon_0).$$

Formula (11), using (Lemma (+|)), is implied by:

$$(12) \quad \exists_{\substack{\delta, \epsilon \\ \delta + \epsilon = \epsilon_0}} \forall_n (n \geq N_2^* \Rightarrow |f_0[n] - a_0| < \delta \wedge |g_0[n] - b_0| < \epsilon).$$

We have to find δ_0^* , ϵ_1^* , and N_2^* such that

$$(13) \quad (\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge_n (n \geq N_2^* \Rightarrow |f_0[n] - a_0| < \delta_0^* \wedge |g_0[n] - b_0| < \epsilon_1^*).$$

Formula (13), using (6), is implied by:

$$(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge_n (n \geq N_2^* \Rightarrow \epsilon_1^* > 0 \wedge n \geq N_1[\epsilon_1^*] \wedge |f_0[n] - a_0| < \delta_0^*),$$

which, using (4), is implied by:

$$(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge_n (n \geq N_2^* \Rightarrow \delta_0^* > 0 \wedge \epsilon_1^* > 0 \wedge n \geq N_0[\delta_0^*] \wedge n \geq N_1[\epsilon_1^*]),$$

which, using (Lemma (max)), is implied by:

$$(14) \quad (\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge_n (n \geq N_2^* \Rightarrow \delta_0^* > 0 \wedge \epsilon_1^* > 0 \wedge n \geq \max[N_0[\delta_0^*], N_1[\epsilon_1^*]]).$$

Formula (14) is implied by

$$(15) \quad (\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \bigwedge \delta_0^* > 0 \bigwedge \epsilon_1^* > 0 \bigwedge_n (n \geq N_2^* \Rightarrow n \geq \max[N_0[\delta_0^*], N_1[\epsilon_1^*]]).$$

Partially solving it, formula (15) is implied by

$$(16) \quad (\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \wedge \delta_0^* > 0 \wedge \epsilon_1^* > 0 \wedge (N_2^* = \max[N_0[\delta_0^*], N_1[\epsilon_1^*]]).$$

Now,

$$(\delta_0^* + \epsilon_1^* = \epsilon_0) \wedge \delta_0^* > 0 \wedge \epsilon_1^* > 0$$

can be solved for δ_0^* and ϵ_1^* by a call to Collins cad-method yielding a sample solution

$$\delta_0^* \leftarrow \frac{\epsilon_0}{2},$$

$$\epsilon_1^* \leftarrow \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Furthermore, we can immediately solve

$$N_2^* = \max[N_0[\delta_0^*], N_1[\epsilon_1^*]]$$

for N_2^* by taking

$$N_2^* \leftarrow \max[N_0[\frac{\epsilon_0}{2}], N_1[\frac{\epsilon_0}{2}]].$$

Hence formula (16) is solved, and we are done. □

Beispiel eines computer-erfundenen Satzes mit Beweis:

Gosper-Zeilberger-Paule-prover: Beispiel aus P. Paule, *Computer-Solution of Problem 94-2*, SIAM REVIEW Vol.37 (1995), 105-106.

Formula["SIAM series",

$$\sum_{k=1, \dots, n} \frac{(-1)^{k+1} (4k+1) (2k)!}{2^k (2k-1) (k+1)! 2^k k!}]$$

Simplify[Formula["SIAM series"], by → PauleSchorn-Telescope, built-in → Built-in["PauleSchorn"]]

If $n-1+n$ is a natural number, then:

$$1 + \frac{-(-1)^n 2^{-2n} (2n)!}{n! (1+n)!}$$

Prove[Formula["SIAM series"], by → PauleSchorn–Telescope, built-in → Built-in["PauleSchorn"]]

Theorem:

If $(-1) + n$ is a natural number, then:

$$\sum_{k=1, \dots, n} \left(\frac{-(-1)^k 2^{-2k} (2k)! (1+4k)}{k! (1+k)! ((-1)+2k)} \right) = 1 + \frac{-(-1)^n 2^{-2n} (2n)!}{n! (1+n)!}$$

Proof:

Let Δ_k denote the forward difference operator in k then

the Theorem follows from summing the equation

$$\frac{-(-1)^k 2^{-2k} (2k)! (1+4k)}{k! (1+k)! ((-1)+2k)} = \Delta_k \left[\frac{(-1)^k 2^{1+2k} (2k)! (1+k)}{k! (1+k)! ((-1)+2k)} \right]$$

over the range $k = 1, \dots, n$.

The equation is routinely verifiable

by dividing the right-hand side by the left-hand side

and simplifying the resulting rational function

$$\frac{\frac{(-1)^{1+k} 2^{1+2(1+k)} (2(1+k))! (2+k)}{(1+k)! (2+k)! ((-1)+2(1+k))} - \frac{(-1)^k 2^{1+2k} (2k)! (1+k)}{k! (1+k)! ((-1)+2k)}}{\frac{-(-1)^k 2^{-2k} (2k)! (1+4k)}{k! (1+k)! ((-1)+2k)}}$$

to 1.

ProofSimplifier[Null, branches → Proved]

$$\text{System`FullSimplify} \left[\frac{\frac{(-1)^{1+k} 2^{1+2(1+k)} (2(1+k))! (2+k)}{(1+k)! (2+k)! ((-1)+2(1+k))} - \frac{(-1)^k 2^{1+2k} (2k)! (1+k)}{k! (1+k)! ((-1)+2k)}}{\frac{-(-1)^k 2^{-2k} (2k)! (1+4k)}{k! (1+k)! ((-1)+2k)}} \right]$$

1

■ Zusammenfassung

100 % der Schulmathematik und 90 % der Vordiplom-Mathematik sind "auf Knopfdruck" verfügbar.

Mehr als die besten Mathematiker in ihrem Kopf zur Verfügung haben, hat jetzt jeder Laie in seinen Händen zur Verfügung.

Ist die Mathematik damit zu Ende? Werden wir Mathematiker uns bald selbst wegrationalisiert haben?

- Computer-Mathematik: Triviale oder trivialisierte Mathematik?

Antwort auf obige Fragen müsste eigentlich für alle Mathematiker selbstverständlich sein.

Ist es aber nicht!

Antwort der *Puristen*:

Computer-Mathematik ist trivial.

Hände weg von den mathematischen Software-Systemen!

Antwort der *Populisten*:

Trivialiserte Mathematik braucht nicht mehr unterrichtet zu werden, sondern nur mehr als "Black-Box" benutzt zu werden.

Hände weg von der trivialisierten Mathematik!

Das Ziel der Mathematik war es schon immer, sich selbst zu "trivialisieren":

Ein nicht-trivialer Satz (mit nicht-trivialem Beweis) auf einer höheren Ebene

trivialisiert ("erschlägt")

unendlich viele Instanzen eines Problems auf einer niedrigeren Ebene.

Das Computer-Zeitalter unterscheidet sich von früheren Zeiten der Mathematik nur dadurch, dass der Begriff des "Erschlagens" eine viel genauere Bedeutung hat.

Je *algorithmischer* die Mathematik wird, umso *mehr* Mathematik brauchen wir!

Warum?

Beispiel: Existenzbeweis für Gröbner-Basen.

Die "Trivialisierung der Mathematik" ist nur durch die enormen Fortschritte in dem Bereich der Mathematik, den man "Computer-Mathematik" (mit vielen Teilgebieten) nennt, möglich geworden.

Konsequenz für die "Soziologie" der Mathematik:

Die "reinsten" und besten Mathematiker mögen sich um die Computer-Mathematik kümmern.

Konsequenz für die "Philosophie" der Mathematik:

Die Algorithmisierung der Mathematik ist niemals abgeschlossen:

Die Mathematiker haben bewiesen (!), dass sie niemals wegrationalisiert werden können.

Konsequenz für die "Politik" der Mathematik:

Wenn sich die Mathematik in aller Stille vom Computer verabschiedet, gibt sie sich selbst auf.

Konsequenz für die "Didaktik" der Mathematik:

Es ist naiv, den Computer aus dem Mathematik-Unterricht zu verbannen.

Es ist genauso naiv, den Computer an jeder Stelle in den Mathematik-Unterricht hineinzupressen.

Balance: Das "White-Box / Black-Box Prinzip".

■ Computer-Mathematik: Schlüsseltechnologie?

Mathematik ist nicht am Ende, sondern so dynamisch wie noch nie.

Gerade die Algorithmisierung beschert der Mathematik einen neuen Anfang und ihre Erfüllung.

Die Algorithmisierung der Mathematik ist die Selbstanwendung der Mathematik auf sich selbst.

Selbstanwendung ist das Wesen der Intelligenz.

In der Algorithmisierung der Mathematik liegt enorme Schubkraft:

Als Forschungsmittel.

Als Forschungsziel.

Als Problemlöseinstanz für die Realwissenschaften.

Als didaktisches Werkzeug.

Als Motor für formale Bildung.

(Computer-)Mathematik ist im "Auge des Hurrikans" der technologischen Entwicklungsspirale:

(Computer-)Mathematik: Die Automatisierung der Denktechnologie.

(Computer-)Mathematik ist eine (die?) Schlüsseltechnologie des Informations- und Kommunikationszeitalters.

Einige politische Konsequenzen:

Die Kraft der heutigen ökonomischen Entwicklung kommt nicht (nur) aus dem Schalten und Walten der Wirtschaftsexperten und Politiker, sondern aus der Kreativität der technischen Disziplinen, in deren Kern die Denktechnologie der Mathematik steht.

Es ist heute so motivierend wie nie, sich als junger Mensch auf das Abenteuer Mathematik-basierter Technik einzulassen.

Die (Computer-)Mathematik lebt in der Spannung zwischen theoretischer Tiefe und praktischer Schlagkraft, in der Welt der internationalen akademischen Forschung genauso wie in der Welt der heißesten IKT-Firmen. Gerade die besten Studenten sollten sich motiviert fühlen, in diesem Gebiet eine Karriere aufzubauen.

Den politisch Verantwortlichen muss klar (gemacht) werden, wo die Kraftquelle für den technologischen Fortschritt und die wirtschaftliche Entfaltung sitzt und wie diese lebendig erhalten werden kann.

Es ist modern geworden, in den Forschungsförderungsprogrammen die "Anwendungen" zu entdecken. So wichtig das ist, wird der Bogen heute oft überspannt. Die treibende Kraft im "Auge des Hurrikans" ist und bleibt das immer feinere Verständnis der Struktur der Natur und die immer wirkungsvollere Beherrschung der wissenschaftlichen Denktechnologie, deren Konzentrat die Mathematik und heute die sich selbst automatisierende Mathematik ist.

■ Referenzen

Der Inhalt dieses Vortrags wurde publiziert in:

B.Buchberger, 2000.

Computer-Algebra: Das Ende der Mathematik? Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 2/2000, S. 16-19.

Das White-Box / Black-Box Prinzip wurde eingeführt in:

B.Buchberger, 1990.

Should Students Learn Integration Rules? SIGSAM Bulletin Vol.24/1,pp.10-17,1990.