Mengen —
wieviele Unendlichkeiten gibt es?

Definition 1.3.1: (naive Mengendefinition von Cantor)
Eine **Menge** *ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

Definition 1.3.2: *Die Objekte x, welche in einer Menge A zusammengefasst werden, bezeichnet man als die* **Elemente** *der Menge A. Ist x ein Element der Menge A, so sagen wir auch, dass x in A* **enthalten** *ist, und wir schreiben diesen Sachverhalt als $x \in A$.*
Die Menge $\emptyset$, welche keine Elemente enthält, heisst die **leere Menge***.*
Sind A und B zwei Mengen, und ist jedes Element x von A auch in B enthalten, so heisst A eine **Teilmenge** *von B. Wir schreiben $A \subseteq B$. Gibt es darüber hinaus mindestens ein Element $y \in B$, welches nicht in A enthalten ist, so ist A eine* **echte Teilmenge** *von B, geschrieben als $A \subset B$.*
Mengen sind einzig und allein durch ihre Elemente charakterisiert. Zwei Mengen A und B sind also **gleich***, geschrieben als $A = B$, wenn sie dieselben Elemente enthalten.*

Wie geben wir nun in der Mathematik Mengen an?

$$A = \{2, 3, 5\}.$$

Unendliche Mengen geben wir durch eine sogenannte "charakteristische Eigenschaft" an, etwa:

$$A = \{x | \underbrace{x \text{ ist Primzahl}}_{P(x)}\}.$$

Hat man bereits eine Menge A, und will alle Elemente von A zusammenfassen, welche eine zusätzliche Eigenschaft P haben, so schreibt man dafür

$$B = \{x \in A | P(x)\}.$$

Die Frage nach den Elementen ($x \in A$?) ist die einzige elementare Frage, die wir an eine Menge A stellen können. Insbesondere können wir nicht fragen, ob etwa x zweimal in A ist, oder ob x "vor" y in A ist. So gilt etwa

$$\{2,3,5\} = \{5,3,2\} = \{2,2,3,5,5,5\}.$$

Definition 1.3.4: *Seien A, B, U Mengen, mit $A \subseteq U$.*
Vereinigung:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Durchschnitt:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Gilt $A \cap B = \emptyset$, so heissen A und B **disjunkt**.

Mächtigkeit von Mengen

Definition 1.3.42: *Zwei Mengen A, B heissen* **gleichmächtig**, *falls es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt.* $\square$

Satz 1.3.43: *Sei U eine gegebene (Grund-)Menge von Mengen (etwa alle Teilmengen einer Menge A). Die Relation der Gleichmächtigkeit ist auf U eine Äquivalenzrelation.*

Definition 1.3.44: *Sei U eine Grundmenge. Die Äquivalenzklasse von $A \subseteq U$ bzgl. der Relation der Gleichmächtigkeit heisst die* **Kardinalzahl** $|A|$ *von A, also*

$$|A| := \{B \in U |\, A \text{ und } B \text{ sind gleichmächtig }\}.$$

Satz 1.3.45: *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$|\{1, \ldots, n\}| \ = \ |\{1, \ldots, m\}| \iff n = m\ .$$

Deshalb spricht man gewöhnlich von n als der Kardinalzahl einer n-elementigen Menge. Als Spezialfall davon ist 0 die Kardinalzahl der leeren Menge $\emptyset$.

Definition 1.3.46: *Seien A, B zwei Mengen.*
Gibt es eine injektive Abbildung $f : A \to B$, so bezeichnet man das durch $|A| \leq |B|$.
Gibt es eine surjektive Abbildung $f : A \to B$, so bezeichnet man das durch $|A| \geq |B|$.

Eigentlich setzt diese Definition einen Satz voraus:

> *Wenn $f : A \to B$ injektiv ist, und $|A| = |A'|, |B| = |B'|$, dann gibt es eine injektive Funktion $f' : A' \to B'$.*

Das ist tatsächlich der Fall, man nennt daher die Relation $\leq$ für Kardinalzahlen wohldefiniert.

Satz 1.3.47: *Seien A, B zwei Mengen. Dann gilt:*

(i) $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$.

(ii) $\leq$ *ist eine Ordnungsrelation auf den Kardinalzahlen.*

(iii) $|A| \leq |B| \iff |B| \geq |A|$.

Definition 1.3.48: *Eine Menge A heisst* **endlich**, *wenn ihre Kardinalzahl eine natürliche Zahl ist. Ansonsten heisst A* **unendlich**.

Satz 1.3.49: *Eine Menge A ist unendlich g.d.w. es eine echte Teilmenge B von A gibt mit $|B| = |A|$.*

Satz 1.3.50: *Für jede unendliche Menge A gilt: $|\mathbb{N}| \leq |A|$.*

$|\mathbb{N}|$ ist also die kleinste Kardinalzahl einer unendlichen Menge. Man bezeichnet $|\mathbb{N}|$ auch als $\aleph_0$ ($\aleph$ ist der erste Buchstabe im hebräischen Alphabet).

Definition1.3.51: *Eine unendliche Menge A heisst* **abzählbar** *bzw.* **abzählbar unendlich** *wenn $|A| = \aleph_0$. Ansonsten heisst A* **überabzählbar**.

Satz 1.3.52: *Die Zahlenmengen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

Satz 1.3.53: *Die Zahlenmenge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis: Wir zeigen, dass es keine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to [0,1] (\subset \mathbb{R})$ gibt.
Jedes $x \in [0,1]$ lässt sich schreiben als Dezimalzahl der Form $0, x_1 x_2 \ldots$ (vergleiche Kapitel 1.2). Weiters vereinbaren wir, dass wir eine Zahl $0, \ldots 1000 \ldots = 0, \ldots 0999 \ldots$ immer in der zweiten Form schreiben.
Sei f eine beliebig aber fix gewählte Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $[0,1]$.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei a_n die n-te Dezimalstelle nach dem Komma von $f(n)$. Sei

$$b_n := \begin{cases} a_n + 1 & \text{falls } a_n < 9 \\ 0 & \text{falls } a_n = 9 \end{cases} .$$

Dann wird die reelle Zahl $0, b_1 b_2 \ldots$ von der Funktion f nicht getroffen. □

Man bezeichnet $|\mathbb{R}|$ auch als c, abgeleitet von "Continuum". Es gilt also $\aleph_0 < c$.

Satz 1.3.55 (Satz von Cantor): *Für jede Menge A ist*

$$|A| \ < \ |\mathcal{P}(A)| \ .$$

Beweis: Angenommen $f : A \to \mathcal{P}(A)$ wäre surjektiv.
Sei $B := \{a \in A | a \notin f(a)\}$.
Sei $b \in A$ mit $f(b) = B$.
Dann haben wir den Widerspruch $b \in B = f(b) \iff b \notin B$. $\square$

Es gibt also unendlich viele Abstufungen von Unendlichkeit

$$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| < |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| < \cdots .$$

Man kann übrigens zeigen, dass $|\mathbb{R}| = c = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.
Die **Kontinuumshypothese** besagt, dass es zwischen $\aleph_0$ und c keine Kardinalzahl gibt. Das kann aber aus den Axiomen der Mengenlehre weder bewiesen noch widerlegt werden. Die Kontinuumshypothese ist also unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre und kann als zusätzliches Axiom aufgenommen werden (oder auch nicht).