Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Peano Axiome (Giuseppe Peano, 1858–1932):

[P1](Null) 0 ist eine natürliche Zahl.

[P2](Nachfolger) Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger (successor), bezeichnet als $S(n)$.

[P3](Null minimal) 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl.

[P4](verschiedene Nachfolger) Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger.

[P5](Induktion) Jede Eigenschaft, welche für 0 gilt und sich von jeder natürlichen Zahl n auf ihren Nachfolger $S(n)$ überträgt, gilt für alle natürlichen Zahlen.

Wir werden 1 für $S(0)$ schreiben, 2 für $S(S(0)) = S(1)$, usw.
Anstatt $S(n)$ werden wir auch schreiben $n + 1$.
Die Peanoaxiome legen unmittelbar eine Ordnung auf den natürlichen Zahlen nahe, nämlich

$$0 < S(0) = 1 < S(S(0)) = 2 < S(S(S(0))) = 3 < \cdots \quad .$$

Definition 1.2.1: *Die* **Addition** *"+" auf $\mathbb{N}$ ist wie folgt definiert für $n, m \in \mathbb{N}$:*

- $n + 0 = n$,
- $n + (m + 1) = (n + m) + 1 \quad$ (also $n + S(m) = S(n + m)$).

$\square$

Aus der Addition lässt sich die Subtraktion ableiten: ist $m < n$, so gibt es offensichtlich ein k mit $m + k = n$. Dieses k ist das Resultat der Subtraktion von m von n, geschrieben $k = n - m$.

Definition 1.2.2: *Die* **Multiplikation** *"·" auf $\mathbb{N}$ ist wie folgt definiert für $n, m \in \mathbb{N}$:*

- $n \cdot 0 = 0$,
- $n \cdot (m + 1) = n \cdot m + n$.

$\square$

Mit $\sum_{i=0}^{l} m_i$ bezeichnen wir die Summe dieser Zahlen m_i. "i" heisst dabei der **Summationsindex**. Er durchläuft sukzessive die natürlichen Zahlen 0 bis l. Wird über einen leeren Laufbereich des Summationsindex summiert, also etwa von $i = 0$ bis $i = -1$, so ist der Wert der Summe 0, also das neutrale Element bzgl. der Addition.

$$\sum_{i=0}^{l} m_i \ = \ m_0 + \cdots + m_l \ , \qquad \sum_{i=0}^{-1} m_i \ = \ 0 \ .$$

Ebenso bezeichnen wir mit $\prod_{i=0}^{l} m_i$ das Produkt dieser Zahlen m_i. "i" heisst in diesem Fall der **Multiplikationsindex**. Wird über einen leeren Laufbereich des Multiplikationsindex multipliziert, also etwa von $i = 0$ bis $i = -1$, so ist der Wert des Produkts 1, also das neutrale Element bzgl. der Multiplikation.

$$\prod_{i=0}^{l} m_i \ = \ m_0 \cdot \cdots \cdot m_l \ . \qquad \prod_{i=0}^{-1} m_i \ = \ 1 \ .$$

In analoger Weise werden $\sum$ und $\prod$ für andere Indexbereiche definiert.

Definition 1.2.3: *Die Operation der* **Potenzierung** *auf* $\mathbb{N}$ *ist wie folgt definiert für* $n, m \in \mathbb{N}$*:*

- $n^0 = 1$,
- $n^{(m+1)} = n^m \cdot n$. $\square$

Prinzip der vollständigen Induktion (aus [P5]):

$$P(0) \wedge \forall n : (P(n) \Longrightarrow P(n+1)) \implies \forall n : P(n)$$

Das heisst, wenn wir zeigen können, dass

- P für 0 gilt, und
- sich für jedes n die Eigenschaft P von n auf den Nachfolger $n+1$ überträgt,

dann können wir daraus schliessen, dass P für alle n gilt.

Um also nachzuweisen, dass die Eigenschaft P für alle natürlichen Zahlen n gilt, weist man zunächst in der "Induktionsbasis" $P(0)$ nach. Sodann nimmt man in der "Induktionshypothese" an, dass $P(\overline{n})$ gilt für ein beliebig aber fix gewähltes $\overline{n}$; und damit zeigt man dann, dass unter diesen Voraussetzungen auch $P(\overline{n}+1)$ gilt. Gelingt das alles, so ist die Eigenschaft P für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Das Prinzip der vollständigen Induktion kann auch äquivalent wie folgt formuliert werden:

$$\forall n : ((\forall k < n : P(k)) \Longrightarrow P(n)) \implies \forall n : P(n)$$

Das heisst, wenn wir zeigen können, dass sich für alle n die Eigenschaft P von allen Vorgängern von n auf n selbst überträgt, dann können wir daraus schliessen, dass P für alle n gilt.

Gilt eine Eigenschaft P für alle natürlichen Zahlen ab N, so kann man entweder eine neue Eigenschaft Q einführen mit

$$Q(n) = P(N + n)$$

und Q für $\mathbb{N}$ beweisen, oder man zeigt

$$P(N) \quad \text{und} \quad \forall n \geq N : P(n) \Longrightarrow P(n+1) \ .$$

Beispiel 1.2.4: (a) Wir zeigen durch Induktion

$$\forall n : 0 + n = n$$

Induktionsbasis: offensichtlich gilt per definitionem die Behauptung für $n = 0$: $0 + 0 = 0$
Induktionshypothese: wir nehmen an, für ein beliebiges aber fix gewähltes $\overline{n}$ gelte

$$0 + \overline{n} = \overline{n}$$

Induktionsschritt: wegen der Definition von "+" und der Induktionshypothese gilt

$$0 + (\overline{n} + 1) \ = \ (0 + \overline{n}) + 1 \ = \ \overline{n} + 1 \ .$$

Somit ist die Behauptung beweisen.

(b) Als nächstes zeigen wir

$$\forall n, m : (n+m)+1 = (n+1)+m$$

Wir führen den Beweis durch Induktion über m.
Induktionsbasis: laut Definition von "+" gilt

$$(n+0)+1 \;=\; n+1 \;=\; (n+1)+0\ .$$

Induktionshypothese: wir nehmen an, für ein beliebiges aber fix gewähltes $\overline{m}$ gelte

$$(n+\overline{m})+1 \;=\; (n+1)+\overline{m}\ .$$

Induktionsschritt: wegen der Definition von "+", der Induktionshypothese, und nochmals der Definition von "+" gilt dann

$$(n+(\overline{m}+1))+1 \;=\; ((n+\overline{m})+1)+1 \;=\; ((n+1)+\overline{m})+1 \;=\; (n+1)+(\overline{m}+1)\ .$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

(c) Als nächstes weisen wir die Kommutativität der Addition nach, also

$$\forall m, n : m + n \;=\; n + m\;.$$

Wir führen den Beweis durch Induktion über n.
Induktionsbasis: wegen der Definition von "$+$" und wegen (a) gilt

$$m + 0 \;=\; m \;=\; 0 + m\;.$$

Induktionshypothese: wir nehmen an, für ein beliebiges aber fix gewähltes $\overline{n}$ gelte

$$\forall m : m + \overline{n} \;=\; \overline{n} + m$$

Induktionsschritt: daraus schliessen wir

$$m+(\overline{n}+1) \;=_{\text{Def }+}\; (m+\overline{n})+1 \;=_{\text{IH}}\; (\overline{n}+m)+1 \;=_{\text{(b)}}\; (\overline{n}+1)+m\,.$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

(d) Wir wollen zeigen, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (*)$$

$P(n)$ besagt, dass n die Eigenschaft (*) hat.
Induktionsbasis: offensichtlich gilt $P(0)$, da $\sum_{i=0}^{0} i = 0$.
Induktionshypothese: wir nehmen an, P gelte für ein beliebiges aber fix gewähltes $\overline{n}$, also

$$\sum_{i=0}^{\overline{n}} i = \frac{\overline{n}(\overline{n}+1)}{2}. \qquad (**)$$

Induktionsschritt: wenn es uns nun gelingt, unter diesen Voraussetzungen zu zeigen, dass P auch für $\overline{n}+1$ gilt, so wissen wir, dass P für alle natürlichen Zahlen n gilt. Das ist aber tatsächlich der Fall, wie wir uns auf folgende Weise überzeugen:

$$\sum_{i=0}^{\overline{n}+1} i \;=\; \sum_{i=0}^{\overline{n}} i + (\overline{n}+1) \;=\; \frac{\overline{n}(\overline{n}+1)}{2} + (\overline{n}+1) \;=\; \frac{(\overline{n}+1)(\overline{n}+2)}{2}.$$

Somit ist die Behauptung bewiesen.

Beispiel: Etwas scherzhaft könnte man auch formulieren:
"*Es gibt keine uninteressante natürliche Zahl.*"
Wir "beweisen" diese Aussage durch Induktion.
$n = 0$: offensichtlich ist 0 eine höchst interessante Zahl, nämlich die kleinste.
Induktionshypothese: "*für alle n kleiner oder gleich einer beliebig aber fix gewählten Zahl $\overline{n}$ gilt: n ist eine interessante Zahl*"
$\overline{n} \longrightarrow \overline{n} + 1$: wir betrachten also $\overline{n} + 1$. $\overline{n} + 1$ kann nicht uninteressant sein, sonst wäre es nämlich die kleinste uninteressante Zahl, was wiederum höchst interessant wäre. Also ist auch $\overline{n} + 1$ interessant. Der "Satz" ist somit bewiesen.

Dazu eine Anekdote. Der berühmte Mathematiker G.H. Hardy hatte das indische Genie Ramanujan im Jahr 1914 nach Cambridge eingeladen. Ramanujan war krank, und Hardy besuchte ihn am Krankenbett: *It was on one of those visits that there happened the incident of the taxi-cab number. Hardy had gone out to Putney by taxi, as usual his chosen method of conveyance. He went into the room where Ramanujan was lying. Hardy, always inept about introducing a conversation, said, probably without a greeting, and certainly as his first remark: 'I thought the number of my taxi-cab was 1729. It seemed to me rather a dull number.' To which Ramanujan replied: 'No, Hardy! No, Hardy! It is a very interesting number. It is the smallest number expressible as the sum of two cubes in two different ways.'* [1] Tatsächlich gilt

$$1729 = 1^3 + 12^3 = 10^3 + 9^3.$$

[1] Seite 37 im Vorwort von C.P.Snow zum Buch G.H.Hardy, "A Mathematician's Apology", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992

Wir haben hier streng unterschieden zwischen der "Variablen" n, welche über den ganzen Bereich der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ variiert, und der beliebig aber fix gewählten Konstanten $\overline{n}$. Macht man das nämlich nicht, so werden die zu zeigende Eigenschaft $(*)$ und die Induktionshypothese $(**)$ identisch; man nimmt also dann bereits die Gültigkeit von $(*)$ an und kann sie daraus offensichtlich unschwer herleiten. Die Unterscheidung zwischen Variablen und Konstanten ist also in einem Induktionsbeweis — wie übrigens immer in der Mathematik — von entscheidender Bedeutung. Dennoch schreibt man dann oft doch wieder einfach n auch für die Konstante. Man kann das aber nur machen, wenn man sich völlig im klaren ist über den verschiedenen Gebrauch des Symbols n — einmal als Variable, das andere Mal als Konstante.

In $\mathbb{N}$ kann eine Zahl m nur dann von n subtrahiert werden, wenn $m \leq n$. Die natürlichen Zahlen sind also nicht abgeschlossen bzgl. der Operation der Subtraktion. Dieser Mangel lässt sich beheben durch die Hinzunahme negativer Zahlen $-n$ mit den üblichen Rechenregeln. Diesen erweiterten Zahlenbereich nennen wir $\mathbb{Z}$, den Bereich der **ganzen Zahlen**.

Die Ordnung $\leq$ kann auf die üblich Weise von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ erweitert werden.

In $\mathbb{Z}$ haben wir auch die Betragsfunktion $|n| = \max\{n, -n\}$.

Definition 1.2.5: *Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Wir sagen m* **teilt** *n, wenn es eine ganze Zahl k gibt, sodass $n = m \cdot k$. Für diesen Zusammenhang schreiben wir $m|n$.*
$m \in \mathbb{Z}$ heisst **reduzibel**, *wenn es $p, q \neq \pm 1$ gibt, sodass $m = p \cdot q$. Ist das nicht der Fall, so heisst m* **irreduzibel**. $\square$

Satz 1.2.6: *Sind $k, m, n \in \mathbb{Z}$, dann gilt*

(i) $k|m \;\wedge\; k|n \implies k|m+n \quad \wedge \quad k|m-n,$

(ii) $k|m \implies k|mn,$

(iii) $k|m \;\wedge\; m|k \implies k = \pm m,$

(iv) $k|m \;\wedge\; m|n \implies k|n.$

Sind a, b von 0 verschiedene natürliche Zahlen, dann gilt

(v) $a|b \implies a \leq b.$

Definition 1.2.7: *Seien* $m, n \in \mathbb{N}$, *nicht beide 0. Dann ist* k *ein* **gemeinsamer Teiler** *von* m *und* n, *wenn gilt* $k|m$ *und* $k|n$. *Ist* g *maximal (bzgl. der Ordnung* $<$*) unter den (endlich vielen) gemeinsamen Teilern von* m *und* n, *so heisst* g *der* **grösste gemeinsame Teiler** *von* m *und* n, *geschrieben*
$g = \mathrm{ggT}(m, n)$.
Falls $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$, *so sind* m *und* n **relativ prim**.

Definition 1.2.8: *Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Dann gibt es $q, r \in \mathbb{N}$, sodass:*

$$m = q \cdot n + r, \quad \text{und} \quad r < n.$$

q heisst der **Quotient** *und r der* **Rest** *der Teilung von m durch n, geschrieben $q = \mathrm{quot}(m, n)$, $r = \mathrm{rest}(m, n)$.*

Diese Beziehung lässt sich auch auf $\mathbb{Z}$ ausdehnen.

Satz 1.2.9: *Für $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, gilt:*

$$\mathrm{ggT}(m, n) = \mathrm{ggT}(\mathrm{rest}(m, n), n) \ .$$

Euklidscher Divisionsalgorithmus
Für gegebene positive natürliche Zahlen m und n wird $g = \mathrm{ggT}(m, n)$ berechnet.

(1) setze $r_0 := m, \; r_1 := n, \; i := 1;$
(2) solange $r_i \neq 0$ ist, führe aus:
$$r_{i+1} := \mathrm{rest}(r_{i-1}, r_i), \; i := i + 1;$$
(3) $(r_i = 0)$ $g := r_{i-1}$ ist der gesuchte ggT. □

Beispiel 1.2.10: Seien $m = 3641, n = 2827$ gegeben. Der Euklidsche Divisionsalgorithmus erzeugt die Folge von Resten

$$\begin{array}{llll} r_0 = 3641 & r_1 = 2827 & r_2 = 814 & r_3 = 385 \\ r_4 = 44 & r_5 = 33 & r_6 = 11 & r_7 = 0 \end{array}$$

Somit ist $11 = \mathrm{ggT}(3641, 2827)$. □

Der Euklidsche Divisionsalgorithmus kann unschwer dahingehend erweitert werden, dass neben dem grössten gemeinsamen Teiler auch sogenannte Bézout-Kofaktoren $a, b \in \mathbb{Z}$ berechnet werden, sodass

$$\mathrm{ggT}(m, n) = am + bn \ .$$

Erweiterter Euklidscher Divisionsalgorithmus
Für positive $m, n \in \mathbb{N}$ wird $g = \mathrm{ggT}(m, n)$ berechnet, sowie $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $g = am + bn$.

(1) setze $(r_0, r_1, s_0, s_1, t_0, t_1) := (m, n, 1, 0, 0, 1), \ \ i := 1;$

(2) solange $r_i \neq 0$ ist, führe aus:

$$q_i := \mathrm{quot}(r_{i-1}, r_i);$$
$$(r_{i+1}, s_{i+1}, t_{i+1}) := (r_{i-1}, s_{i-1}, t_{i-1}) \ - \ q_i \cdot (r_i, s_i, t_i);$$
$$i := i + 1;$$

(3) $(r_i = 0)$ $g := r_{i-1}$ ist der gesuchte ggT, und die Kofaktoren sind $a := s_{i-1}, b := t_{i-1}$. $\square$

Definition 1.2.11: *Eine natürliche Zahl p ist eine* **Primzahl** *bzw. ist* **prim**, *wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

- $p \geq 2$,
- *wenn* $p | m \cdot n$, *dann* $p | m$ *oder* $p | n$.

Satz 1.2.12: *Für von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c gilt:*

(i) *Aus* $a | bc$ *und* $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ *folgt* $a | c$.

(ii) *Sei p eine Primzahl. Aus* $a | p$ *folgt* $a = 1$ *oder* $a = p$.

Satz 1.2.13: *Sei $p \in \mathbb{N}$.*
Dann gilt: p ist Primzahl $\iff$ p ist irreduzibel.

Satz 1.2.14: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Satz 1.2.15: *Für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ gibt es verschiedene Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ und zugehörige Potenzen $e_1, \ldots, e_m$, sodass*

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{e_i}.$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Umreihung der Primzahlen.

Beispiel 1.2.16: In $\mathbb{N}$ stimmen also die Begriffe "prim" und "irreduzibel" überein. Das ist aber nicht in jedem Zahlbereich so. Als Teilring der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ betrachten wir $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, also Zahlen von der Form $a + b\sqrt{-5}$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ (für den Zahlbereich $\mathbb{C}$ und den Begriff eines "Ringes" sei auf spätere Kapitel verwiesen). In $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ können wir addieren und multiplizieren, etwa

$$(1+\sqrt{-5}) + (2-3\sqrt{-5}) = 3 - 2\sqrt{-5}\ ,$$
$$(1+\sqrt{-5}) \cdot (2-3\sqrt{-5}) = 17 - \sqrt{-5}.$$

Zahlen $\alpha = a + b\sqrt{-5}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ haben eine Norm $N(\alpha) = a^2 + 5b^2$. Die Norm von α ist immer eine natürliche Zahl. Weiters ist die Norm multiplikativ, d.h. $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$. Nur ± 1 haben die Norm 1. Nun lässt sich 9 auf prinzipiell verschiedene Arten zerlegen

$$3 \cdot 3 \;=\; 9 \;=\; (2+\sqrt{-5}) \cdot (2-\sqrt{-5})\ .$$

Alle diese Faktoren sind irreduzibel, da es keine Elemente von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mit Norm 3 gibt. Aber weder 3 noch $2 \pm \sqrt{-5}$ sind prim.

Die Theorie der natürlichen Zahlen (Arithmetik) betrifft wohl einen der grundlegendsten Bereiche der Mathematik. Dennoch ist diese Theorie äusserst reichhaltig und bis heute noch in grossen Teilen unverstanden. So beschäftigte etwa der berühmte *Satz von Fermat* (Pierre Fermat, 1601?–1665)

"Die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ ist unlösbar für natürliche Zahlen $x, y, z \neq 0$ und $n > 2$"

die Mathematik seit Jahrhunderten und konnte erst in den 1990er Jahren von Andrew Wiles bewiesen werden, und zwar mit Mitteln, welche weit über elementare Arithmetik hinausgehen.

Bisher unbewiesen ist die *Goldbachsche Vermutung* (C.Goldbach, 1690–1764), nämlich

"Jede gerade Zahl grösser als 2 lässt sich schreiben als Summe zweier Primzahlen".

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

In den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kann man zwar beliebig subtrahieren, nicht aber dividieren (Division mit Quotient und Rest ist eine andere Operation). Dieser Mangel kann behoben werden durch den Übergang zu den **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$: eine rationale Zahl q ist ein Paar (z, n) ganzer Zahlen (üblicherweise geschrieben als $q = \frac{z}{n}$), wobei $n \neq 0$ und

$$\frac{z}{n} = \frac{z'}{n'} \iff zn' = z'n.$$

Die beiden Komponenten einer rationalen Zahl heissen **Zähler** und **Nenner**. Offensichtlich kann jede ganze Zahl z auch als rationale Zahl $\frac{z}{1}$ interpretiert werden.

Addition und Multiplikation in $\mathbb{Q}$ folgen den herkömmlichen Regeln. In $\mathbb{Q}$ hat nun jede Zahl q ausser der 0 ein Inverses q^{-1} mit der Eigenschaft $q \cdot q^{-1} = 1$.
Die rationalen Zahlen tragen auch eine natürliche Ordnung, welche mit der Ordnung der ganzen Zahlen verträglich ist. Wenn wir uns etwa o.B.d.A. (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) rationale Zahlen mit positivem Nenner geschrieben denken, so hat man

$$q = \frac{z}{n} < q' = \frac{z'}{n'} \iff zn' < z'n \ .$$

Rationale Zahlen lassen sich auch schreiben als "Dezimalzahlen". Jede rationale Zahl entspricht dabei einer periodischen Dezimalzahl.

Satz 1.2.17: *Es gibt keine rationale Zahl q mit der Eigenschaft $q^2 = 2$.*
(Also $\sqrt{2}$ ist nicht rational, bzw. die polynomiale Gleichung $x^2 - 2 = 0$ ist in $\mathbb{Q}$ unlösbar.)

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Es gibt beschränkte monoton wachsende (oder fallende) Folgen von rationalen Zahlen, etwa

$$1,\ 1,4,\ 1,41,\ 1,414,\ 1,4142,\ \dots, 1,414213562,\ \dots < 1,5\ ,$$

welche gegen keine rationale Zahl konvergieren, also keinen Limes in $\mathbb{Q}$ haben. Nimmt man nun alle solchen Limiten, also etwa $\sqrt{2}$, zu $\mathbb{Q}$ hinzu, so erhält man die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.

Auf die Begiffe wie "konvergiert" oder "Limes" gehen wir an dieser Stelle nicht näher ein, sie werden ausführlich in der Vorlesung zur Analysis behandelt.

Reelle Zahlen lassen sich auch schreiben als (nicht notwendigerweise periodische) "Dezimalzahlen". Diese Schreibweise ist aber nicht eindeutig, so gilt etwa

$$1,0000\dots = 1 = 0,9999\dots\ .$$

Das ist aber die einzige Art von Uneindeutigkeit in der Dezimaldarstellung.

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Mit der Bezeichnung $i = \sqrt{-1}$ (**imaginäre Einheit**) kann man Zahlen der Form

$$c = a + bi \quad \text{mit} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

betrachten. Solche Zahlen nennt man **komplexe Zahlen** und der betreffende Zahlenbereich wird geschrieben als $\mathbb{C}$.
In $\mathbb{C}$ hat nun tatsächlich jede polynomiale Gleichung eine Lösung, man nennt daher $\mathbb{C}$ **algebraisch abgeschlossen**.

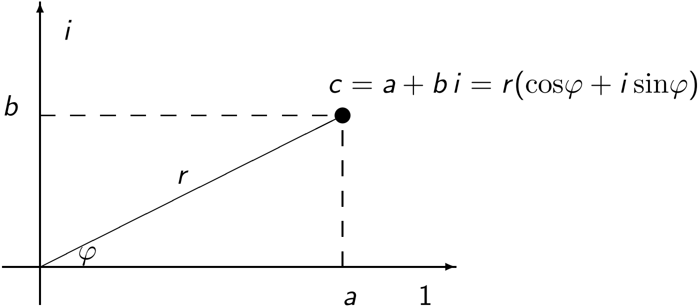

Figure: Gauß'sche Zahlenebene

Solche komplexen Zahlen lassen sich also interpretieren als Paare reeller Zahlen; das führt zur Darstellung komplexer Zahlen in der **Gauß'schen Zahlenebene**.
In der Darstellung $c = a + bi$ heisst a der **Realteil** von c, $a = \mathrm{re}(c)$, und b heisst der **Imaginärteil** von c, $b = \mathrm{im}(c)$.
Weiters ist $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ der **Betrag** von c.

Addition und Multiplikation sind klar (wobei $i^2 = -1$),
Division ergibt sich aus

$$c^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$$

$$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i = \frac{a}{|c|^2} - \frac{b}{|c|^2} i.$$

Spiegelt man c in der Gauß'schen Zahlenebene um die reelle Achse, so erhält man die **komplex konjugierte** Zahl $\overline{c} = a - bi$.