1.1 Was ist eigentlich Mathematik?

Jeder von uns hat eine naive Vorstellung davon, was der Gegenstand der Mathematik ist:
– sie befasst sich mit Zahlen,
– geometrischen Figuren,
– und Beziehungen zwischen solchen Objekten.

Oft wird die Mathematik zusammen mit den Naturwissenschaften genannt, auch an der JKU gehören die mathematischen Institute zur Technisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät.

Ist also die Mathematik eine Naturwissenschaft?

Wo in der Natur gibt es "37" oder "$y = x + 1$" (die Gerade durch $(-1, 0)$ und $(0, 1)$) ?
Wo in der Natur gibt es wirklich einen Kreis? Hat nicht jedes scheinbar kreisförmige Gebilde, wenn wir es nur genau genug betrachten, Unregelmässigkeiten, ist also nicht wirklich kreisförmig? Und auch wenn es ein wirklich kreisförmiges Gebilde gäbe, wäre das dann "der Kreis"? Oder wäre es nicht doch nur ein spezielles Beispiel für das "Prinzip des Kreises", den "Kreis an sich"?

Wenn wir diesen Fragen zur Philosophie der Mathematik nachgehen, merken wir sehr bald,

dass die Mathematik eben keine Naturwissenschaft ist.

Die Gegenstände ihrer Betrachtung kommen in der Natur nicht vor. Sie sind einzig und allein Schöpfungen unseres Geistes. Als solche haben wir sie im Prinzip völlig unter Kontrolle. Wir können sie exakt definieren und die Regeln festlegen, wie wir mit ihnen operieren wollen. Und dennoch entziehen sich die mathematischen Objekte unserem völligen Zugriff. In seinem berühmten Unvollständigkeitssatz hat Kurt Gödel im Jahr 1931 bewiesen,

dass es in jedem formalen System, welches umfassend genug ist um die natürlichen Zahlen darin auszudrücken, Aussagen gibt, die im System weder bewiesen noch widerlegt werden können.

Mit anderen Worten: nicht alles, was "gilt", ist auch "beweisbar".

Mathematik ist also sicherlich keine Naturwissenschaft !

Mathematische Theorien werden nicht experimentell überprüft. Nicht das Experiment ist der letzte Massstab, sondern der Beweis. Mathematik ist aber natürlich auch keine Geisteswissenschaft im klassischen Sinn. Sie stellt eine eigene Kategorie im Gebäude der Wissenschaften dar.

Umso verblüffter stellen wir immer wieder fest, dass zahlreiche Zweige der Mathematik ganz überraschende Anwendungen etwa in den Naturwissenschaften haben. In seinem Artikel

The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences

erzählt der Physiknobelpreisträger Eugene P. Wigner (Princeton University) folgende Geschichte:

There is a story about two friends, who were classmates in high school, talking about their jobs. One of them became a statistician and was working on population trends. He showed a reprint to his former classmate. The reprint started, as usual, with the Gaussian distribution and the statistician explained to his former classmate the meaning of the symbols for the actual population, for the average population, and so on. His classmate was a bit incredulous and was not quite sure whether the statistician was pulling his leg. "How can you know this?" was his query. "And what is this symbol here?" "Oh," said the statistician, "this is π." "What is that?" "The ratio of the circumferance of the circle to its diameter." "Well, now you are pushing your joke too far," said the classmate, "surely the population has nothing to do with the circumference of the circle."

Wigner gibt zahlreiche Beispiele unerwarteter Anwendbarkeit von Mathematik in den Naturwissenschaften und schliesst:

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.

Mathematik ist die Wissenschaft von Zusammenhängen abstrakter Objekte. Beispiele solcher Objekte können Zahlen sein, oder Abbildungen, oder geometrische Figuren; aber auch Graphen, Formelausdrücke, oder mathematische Theorien selbst. Die Mathematik zieht logisch stichhaltige Schlüsse über das Verhalten solcher Objekte, wir nennen so etwas einen Beweis. Ein Beweis besteht typischerweise aus algebraischen Umformungen, also "Berechnungen", und logischen Schlüssen, also "Herleitungen". Der Mathematiker kann sich heutzutage sowohl beim Berechnen als auch beim logischen Schliessen von Softwaresystemen unterstützen lassen. etwa von Computeralgebra-Systemen wie Maple oder Mathematica.

Beweise in der Mathematik haben auch ihr Eigenleben. Sie werden meist in roher, ungeschliffener Form entdeckt. Im Laufe ihrer Entwicklung werden sie dann unzählige Male hin und her gewälzt, dadurch abgeschliffen und glatt poliert. Manche von ihnen verlieren schliesslich jede Ähnlichkeit mit ihrer ursprünglichen Form und strahlen eine blendende Eleganz aus. Ja, es gibt so etwas wie Ästhetik der Mathematik! Diese eherne Gültigkeit und Schönheit mathematischer Theorien hat wohl
Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)
zu folgendem Ausspruch veranlasst:
Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und Arithmetik die Königin der Mathematik. Sie lässt sich oft herbei ihre Dienste der Astronomie und anderen Naturwissenschaften anzubieten, aber unter allen Umständen gebührt ihr der erste Platz.