1.4 Logik

Aussagenlogik

Definition 1.4.1: *Unter einer* **Grundaussage** *verstehen wir einen deklarativen Satz, der entweder wahr* ($\mathbf{t}$) *oder falsch* ($\mathbf{f}$) *ist.*
Zur Bezeichnung von Aussagen verwenden wir sogenannte **Aussagenvariable**, *wie etwa* P, Q, R.
Sowohl Grundaussagen als auch Aussagenvariable sind **Aussagen**.
Ist A *eine Grundaussage, so bezeichnen wir mit* $T(A)$ *den* **Wahrheitswert** *von* A.
Die Funktion T *heisst die* **Wahrheitsfunktion**.
Auf Aussagenvariablen ist die Wahrheitsfunktion zunächst undefiniert, es sei denn, wir weisen der Variablen explizit einen Wahrheitswert zu.

Man beachte, dass wir hier davon ausgehen, dass eine Aussage nur einen der beiden Wahrheitswerte **t** oder **f** haben kann, die hier betrachtete Logik ist also zweiwertig. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom **Prinzip des ausgeschlossenen Dritten** (tertium non datur).

Definition 1.4.2: *Seien P, Q Aussagen. Mittels* **Junktoren** *generieren wir neue Aussagen.*

- *die* **Negation** $\neg P$, *"nicht P"; $T(\neg P) = \mathbf{t}$ genau dann wenn $T(P) = \mathbf{f}$;*
- *die* **Konjunktion** $P \wedge Q$, *"P und Q"; $T(P \wedge Q) = \mathbf{t}$ genau dann wenn sowohl $T(P) = \mathbf{t}$ als auch $T(Q) = \mathbf{t}$;*
- *die* **Disjunktion** $P \vee Q$, *"P oder Q"; $T(P \vee Q) = \mathbf{t}$ genau dann wenn entweder $T(P) = \mathbf{t}$ oder $T(Q) = \mathbf{t}$ (oder beide wahr sind, inklusives oder);*
- *die* **Implikation** $P \implies Q$, *"wenn P dann Q"; $T(P \implies Q) = \mathbf{f}$ genau dann wenn $T(P) = \mathbf{t}$ und $T(Q) = \mathbf{f}$, also wenn die Hypothese P wahr ist, aber die Konklusion Q falsch ist;*
- *die* **Äquivalenz** $P \iff Q$, *"P ist äquivalent zu Q"; $T(P \iff Q) = \mathbf{t}$ genau dann wenn $T(P) = T(Q) = \mathbf{t}$ oder $T(P) = T(Q) = \mathbf{f}$.*

Aussagen, welche keine Junktoren enthalten (also Grundaussagen und Aussagenvariable) heissen auch **atomare Aussagen**. *Alle übrigen sind* **zusammengesetzte Aussagen**.

Zuordnung von Wahrheitswerten zu aussagenlogischen Variablen in einer **Wahrheitstabelle**.

Beispiel 1.4.3: Wir stellen die Wahrheitstabelle für die Aussage

$$(P \implies Q) \iff (R \wedge P)$$

auf.

P	Q	R	$P \implies Q$	$R \wedge P$	$(P \implies Q) \iff (R \wedge P)$
t	**t**	**t**	**t**	**t**	**t**
t	**t**	**f**	**t**	**f**	**f**
t	**f**	**t**	**f**	**t**	**f**
t	**f**	**f**	**f**	**f**	**t**
f	**t**	**t**	**t**	**f**	**f**
f	**t**	**f**	**t**	**f**	**f**
f	**f**	**t**	**t**	**f**	**f**
f	**f**	**f**	**t**	**f**	**f**

Definition 1.4.4: *Sei P eine Aussage, welche ausser Grundaussagen nur die Variablen $P_1, \ldots, P_n$ enthält. Für die Grundaussagen seien Wahrheitswerte fix festgelegt.*
P heisst **Tautologie** *(bzgl. der festgelegten Wahrheitswerte für die Grundaussagen), wenn bei jeder möglichen Belegung der Variablen $P_1, \ldots, P_n$ mit Wahrheitswerten die Aussage P den Wahrheitswert* **t** *erhält.*
Eine Aussage, deren Negation eine Tautologie ist, heisst **Kontradiktion***.*
Zwei Aussagen P und Q heissen **(aussagenlogisch) äquivalent***, wenn $P \Longleftrightarrow Q$ eine Tautologie ist.*
Eine Aussage Q ist eine **(aussagenlogische) Konsequenz** *der Aussagen $P_1, \ldots, P_n$, wenn $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \Longrightarrow Q$ eine Tautologie ist.* $\square$

Die Definition einer aussagenlogischen Konsequenz kann auch auf folgende Weise ausgedrückt werden:

> *Q ist eine Konsequenz von $P_1, \ldots, P_n$,*
> *wenn $T(Q) = \mathbf{t}$ sein muss unter der Voraussetzung*
> *$T(P_1) = \cdots = T(P_n) = \mathbf{t}$.*

In einem mathematischen Beweis können wir also jede Ausssage verwenden, welche eine Konsequenz bereits vorher bewiesener Aussagen ist. Auf diesem Prinzip bauen etliche "Beweismethoden" auf.

Beweismethoden 1.4.5:

- Die Aussage

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$$

  ist eine Tautologie. Eine Implikation $P \implies Q$ ist also immer äquivalent zu $\neg Q \implies \neg P$. Anstatt die eine Implikation zu beweisen, reicht es immer aus, die andere zu beweisen.
- Die **De Morgan'schen Gesetze** beruhen auf den folgenden Tautologien:

$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P \wedge \neg Q), \qquad \neg(P \wedge Q) \iff (\neg P \vee \neg Q).$$

  Hat man also die Negation einer Disjunktion zu zeigen, so reicht es aus, in zwei (unabhängigen) Beweisschritten die Negation der einzelnen Teilaussagen zu zeigen.

In ähnlicher Weise gehen alle Beweismethoden der Aussagenlogik auf Tautologien zurück. Einige davon sind von besonderer Wichtigkeit und wurden deshalb mit Namen belegt.

Beweismethoden 1.4.6: Wir führen einige der wichtigsten Beweismethoden der Aussagenlogik an:

- **Modus Ponens:** aus P und $P \implies Q$ können wir schliessen Q.
  Die zugehörige Tautologie ist $[P \wedge (P \implies Q)] \implies Q$.
- **Modus Tollens:** aus $\neg Q$ und $P \implies Q$ können wir schliessen $\neg P$.
- **Indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis, "reductio ad absurdum":** aus $(\neg P) \implies (Q \wedge \neg Q)$ können wir schliessen P.
  Die zugehörige Tautologie ist $[(\neg P) \implies (Q \wedge \neg Q)] \implies P$.
- **Beweis durch Fallunterscheidung:** aus $P \vee Q$, $P \implies R$ und $Q \implies R$ können wir schliessen R.
- **Beweis der Äquivalenz durch beidseitige Implikation:** aus $P \implies Q$ und $Q \implies P$ können wir schliessen $P \iff Q$.

Weiters können wir in der Aussagenlogik das Prinzip des **bedingten Beweises** anwenden: wenn wir aus der Annahme von P einen Beweis für Q erzeugen können, dann können wir schliessen $P \implies Q$.

Bezeichnung 1.4.7: Quantoren

- Der **Allquantor** $\forall$ drückt aus, dass eine Aussage "für alle" möglichen Werte einer Variablen gelten soll. So bedeutet also

$$\forall x P(x) \ ,$$

dass das Prädikat für alle möglichen x gilt. Der Wahrheitswert $T(\forall x P(x))$ ist also genau dann **t**, wenn $T(P(x)) = \mathbf{t}$ für alle möglichen x.

- Der **Existenzquantor** $\exists$ drückt aus, dass eine Aussage für zumindest einen möglichen Wert gilt, also "es gibt" so ein x, bzw. "es existiert" so ein x. So bedeutet also

$$\exists x P(x) \ ,$$

dass es zumindest ein x gibt, für welches das Prädikat gilt. Der Wahrheitswert $T(\exists x P(x))$ ist also genau dann **t**, wenn $T(P(x)) = \mathbf{t}$ für zumindest ein x.

Definition 1.4.8: *Verbindet man Prädikate mit Quantoren und logischen Junktoren, so erhält man eine* **prädikatenlogische Aussage** *oder* **Formel**. *Die Variable x in der Formel $\forall x P(x)$* **gebunden**. *Jede Variable, welche nicht durch einen Quantor gebunden wird, heisst* **frei**. □

Aussagen, in denen alle Variablen gebunden sind, haben einen Wahrheitswert

Prädikate können natürlich nicht nur einstellig sein, wie $P(x)$, sondern auch mehrstellig, wie $Q(x_1, \ldots, x_n)$. So ist etwa die Aussage

"3 ist der grösste gemeinsame Teiler von 6 und 9"

mittels eines 3-stelligen Prädikates $GGT(3, 6, 9)$ ausdrückbar. Dass jedes Paar natürlicher Zahlen einen grössten gemeinsamen Teiler hat, schreiben wir dann als

$$\forall x \forall y \exists z \, GGT(z, x, y) \ .$$

Wollen wir eine Aussage nicht näher zerlegen, so verwenden wir dafür einfach ein 0-stelliges Prädikat P.

Häufig wollen wir den Bereich einer mathematischen Variablen auf eine Menge A, etwa $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$, einschränken. Das können wir natürlich ausdrücken als

$$\forall x(x \in A \Longrightarrow P(x)) \quad \text{bzw.} \quad \exists x(x \in A \land P(x)) \ ,$$

wir schreiben diesen Sachverhalt aber kürzer als

$$(\forall x \in A)P(x) \quad \text{bzw.} \quad (\exists x \in A)P(x)$$

oder

$$\forall x \in A : P(x) \quad \text{bzw.} \quad \exists x \in A : P(x) \ .$$

Wenn dieselbe Art von Quantor mehrmals hintereinander vorkommt, so fasst man das zusammen zu einem Quantor über mehrere Variablen; z.B. schreiben wir statt $\forall x \forall y P(x, y)$ auch $\forall x, y P(x, y)$.

Ebenso wie in der Aussagenlogik kann man auch in der Prädikatenlogik den Begriff der **logischen Konsequenz** bzw. **Äquivalenz** einführen, und aufbauend darauf ergeben sich wiederum “Beweismethoden”.

Beweismethoden 1.4.9: dabei setzen wir voraus, dass die Variablen jeweils über nichtleere Bereiche variieren.

- **Umwandlung von Quantoren:** die Formeln $\neg\forall x P(x)$ und $\exists x \neg P(x)$ sind äquivalent (also logische Konsequenzen von einander).
  Ebenso sind die Formeln $\neg\exists x P(x)$ und $\forall x \neg P(x)$ äquivalent.
- **Universelle Spezifikation:** aus $\forall x P(x)$ können wir schliessen $P(c)$, wobei c eine Konstante ist.
- **Universelle Generalisation:** wenn man ohne besondere Annahmen bzgl. x beweisen kann $P(x)$, dann können wir schliessen $\forall x P(x)$.
- **Existentielle Generalisation:** aus $P(c)$ für eine Konstante c können wir schliessen $\exists x P(x)$.
- **Vertauschung von Quantoren:**

$$\forall x \forall y P(x,y) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad \forall y \forall x P(x,y)$$

$$\exists x \exists y P(x,y) \quad \text{ist äquivalent zu} \quad \exists y \exists x P(x,y)$$

Beispiel 1.4.10: Wir wollen an einigen Beispielen die Verwendung von Quantoren demonstrieren. Seien j, k, l, m, n Variablen über $\mathbb{Z}$.

- Die Aussage "n ist gerade" schreiben wir in der Prädikatenlogik als
$$\exists m(n = 2m) \ .$$
Die Aussage "n ist ungerade" schreiben wir in der Prädikatenlogik als
$$\exists m(n = 2m + 1) \ .$$
- Die (wahre, aber durchaus nicht offensichtliche) Aussage, dass jede nichtnegative ganze Zahl ausgedrückt werden kann als die Summe von 4 Quadraten, schreiben wir als
$$\forall n \geq 0 \, \exists j, k, l, m \ (n = j^2 + k^2 + l^2 + m^2) \ .$$