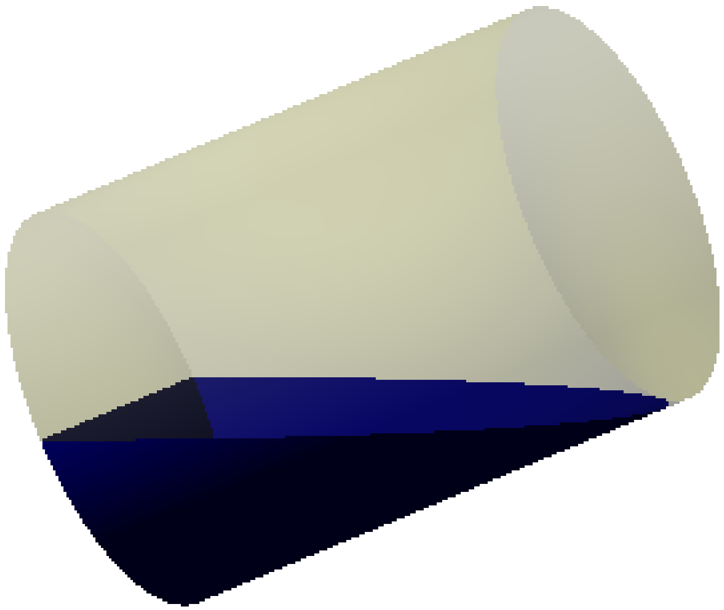
Berechnung von Volumnina

Ein mit Flüssigkeit gefülltes zylindrisches Glas (Radius der Grundfläche R, Höhe H) wird durch kippen solange geleert, bis der Flüssigkeitsspiegel durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht. Wieviel Flüssigkeit ist noch im Glas?



Volumina unter Funktionsgraphen

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ eine “vernünftige” Menge. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in D$. Wir suchen das Volumen des Körpers

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z \leq f(x, y)\}$$

Schreibweise als Integral:

$$V = \int_D f(x, y) d(x, y)$$

Definition

Die mathematische Definition ist ähnlich wie im univariaten Fall:

• Der Bereich D wird in Teilbereiche D_i, $i = 1, , n$ zerlegt. Für jeden Teilbereich wird $(x_i, y_i) \in D_i$ gewählt. Die Riemannsumme ist definiert durch

$$R := \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) F(D_i),$$

wobei $F(D_i)$ die Fläche von D_i ist.

• Man betrachtet eine Folge von Zerlegungen mit der Eigenschaften, daß der maximale Durchmesser der Teilbereiche gegen Null geht.

• Das Integral ist definiert als Grenzwert der Riemannsummen.

Rechteckige Bereiche

Es sei $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$. Dann kann das Integral in zwei Schritten berechnet werden:

Schritt 1: Berechne für konstante x das Integral

$$I_x = \int_c^d f(x, y)dy.$$

Schritt 2: Berechne

$$\int_a^b I_x dx.$$

Der Satz von Fubini

Es sei $D = [a, b] \times [c, d]$. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$\int_D f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Beispiel

Berechnung von $\int_D (x^2y^2 + xy - x^2y - xy^2)d(x,y)$, für $D = [0,1] \times [0,1]$.

Kompliziertere Integrationsbereiche

Es seien $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ die Fläche, die durch die Funktionsgraphen von g und h und eventuell durch die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt ist:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Dann gilt

$$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Beispiele

$a = -R, b = R$, $g(x) = 0$, $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $f(x, y) = \frac{H}{R} y$.

Dasselbe muß rauskommen beim folgenden Beispiel:

$a = 0, b = R$, $g(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $h(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $f(x, y) = \frac{H}{R} x$.

Integrationsregeln

Linearität:

$$\int_D (f(x,y) + g(x,y))d(x,y) = \int_D f(x,y)d(x,y) + \int_D g(x,y)d(x,y)$$

$$\int_D cf(x,y)d(x,y) = c\int_D f(x,y)d(x,y)$$

Additivität auf Bereichen:

$$\int_{D_1 \cup D_2} f(x,y)d(x,y) = \int_{D_1} f(x,y)d(x,y) + \int_{D_2} f(x,y)d(x,y)$$

falls D_1 und D_2 disjunkt sind.

Variablentransformation

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein "vernünftiger" Bereich. Eine Variablentransformation ist eine bijektive Abbildung $g : D \to D' \subset \mathbb{R}^2$, sodaß sowohl g als auch g^{-1} differenzierbar sind.

Beispiel: $D = (0, \infty) \times [0, 2\pi)$, $D' = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$,
$g(r, \phi) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$.

Transformationsregel

Es sei $g : D \to D'$, $(u,v) \to (x,y) = (g_1(u,v), g_2(u,v))$ eine Variablentransformation. Die Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial u} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial u} \end{pmatrix}$ heißt Jacobi-Matrix und wird mit J_g oder auch $\frac{dg}{d(u,v)}$ bezeichnet.

$$\int_{D'} f(x,y)d(x,y) = \int_D f(g_1(u,v), g_2(u,v))|\det(J_g)(u,v)|d(u,v)$$