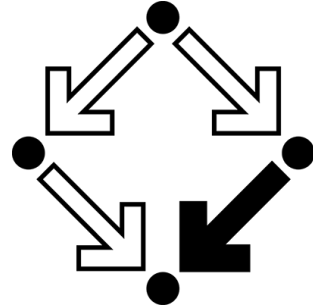




**JOHANNES KEPLER
UNIVERSITY LINZ**



Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

Josef Schicho

WS 2018/19

1 Verschiedene Typen von Dynamischen Systemen

Ein dynamisches System ist ein mathematisches Modell eines Prozesses durch Funktionen von einer Menge T (Zeit) in einen Raum X . Die Menge T ist entweder gleich \mathbb{R} bzw. ein Intervall von \mathbb{R} (kontinuierliches dynamisches System) oder gleich \mathbb{N} (diskretes dynamisches System). Der Raum X ist meistens ein reeller endlich-dimensionaler Vektorraum – bei linearen dynamischen Systemen ist das unabdingbar – oder eine Teilmenge eines Vektorraumes. Das Wesentliche ist, dass die Funktion (manchmal auch eine Menge von Funktionen) nicht durch einen expliziten Ausdruck beschrieben wird, sondern im diskreten Fall durch eine Rekursion und im kontinuierlichen Fall durch eine Differentialgleichung.

Wir beginnen mit dem diskreten Fall: $T = \mathbb{N}$, und $X \subset \mathbb{R}$ oder $X \subset \mathbb{R}^n$. Die Funktion $f : T \rightarrow X$ wird beschrieben durch die Rekursionsgleichung der Ordnung $k > 0$, die wie folgt aussieht:

$$\forall t \in T : f(t+k) = F(f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1), t),$$

wobei $F : (X^k \times T) \rightarrow X$ eine gegebene stetige Funktion ist. Sobald die Anfangswerte $f(0), f(1), \dots, f(k-1)$ bekannt sind, ist die Funktion f eindeutig festgelegt und kann mit einem Programm rekursiv an jeder natürlichen Zahl ausgewertet werden.

Sehr oft ist man in der Situation, daß der Wert $F(x_0, \dots, x_{k-1}, t)$ nicht von t abhängt, also dass man eigentlich eine Funktion $F : X^k \rightarrow X$ hat. Wir sprechen in diesem Fall von einer autonomen (zeitunabhängigen) Rekursion. Der nicht-autonome Fall entspricht eigentlich nicht der “Philosophie” der dynamischen Systeme: wenn wir zeitabhängige Rekursionen erlauben, können wir ja auch gleich einen Ausdruck für die Funktion in die Rekursion stecken:

$$F(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, t) := A(t),$$

und hätten dann eine explizite Darstellung $f(t) = A(t)$. Genau das, was wir in der Theorie der dynamischen Systeme ja ausschließen wollten. Drum ist der autonome Fall der normale Fall.

Wenn uns jetzt eine nicht-autonome Rekursion über den Weg läuft und wir trotzdem philosophisch auf der Linie der dynamischen Systeme bleiben wollen, dann ist das möglich: der nicht-autonome Fall läßt sich immer auf den autonomen Fall zurückführen. Außerdem können Rekursionen beliebiger Ordnung immer auf Rekursionen erster Ordnung zurückgeführt werden. Beide Rückführungen sind nicht gratis, sie gehen auf Kosten höherer Dimension n des Wertebereichs von f .

Wir beschreiben zuerst die Rückführung einer nicht-autonomen Rekursion erster Ordnung für eine Funktion $f : T \rightarrow X$, gegeben durch die Funktion $F : (X \times T) \rightarrow X$; als Rekursion für f liest sich das so:

$$\forall t \in T : f(t+1) = F(f(t), t). \quad (1)$$

Wir definieren nun $Y := X \times T$ und die Funktion

$$G : Y \rightarrow Y, (x, t) \mapsto (F(x, t), t+1),$$

die eine Rekursion für $g : T \rightarrow Y$ definiert:

$$\forall t \in T : g(t+1) = G(g(t)). \quad (2)$$

Wenn nun $f : T \rightarrow X$ die Rekursion 1 erfüllt, dann erfüllt die Funktion $(x, t) \mapsto (f(t), t)$ die Rekursion 2. Umgekehrt: wenn $g : T \rightarrow Y$ die Rekursion (2) erfüllt und einen Startwert $g(0)$ mit t -Komponente gleich 0 hat, dessen t -Komponente gleich 0 ist, dann ist die erste Komponente von g eine Lösung von Rekursion (1) und die zweite Komponente ist die Identität $t \mapsto t$. Bei Rekursionen höherer Ordnung funktioniert eine ähnliche Rückführung (wobei es beim Ausdenken einer Rekursion für die Zeitkomponente ein bisschen Platz für Kreativität gibt).

Nun beschreiben wir die Rückführung einer autonomen Rekursion von Ordnung $k > 1$ für eine Funktion $f : T \rightarrow X$, gegeben durch eine Funktion $F : X^k \rightarrow X$ und als Rekursion geschrieben

$$\forall t \in T : f(t+k) = F(f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1)), \quad (3)$$

auf eine Rekursion erster Ordnung. Wir definieren $Y := X^k$ und die Funktion

$$G : Y \rightarrow Y, (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, F(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})).$$

Diese definiert wieder eine Rekursion für $g : T \rightarrow Y$; die Rekursionsgleichung ist die gleiche wie in (2). Wenn $f : T \rightarrow X$ nun die Rekursion 3 erfüllt, dann erfüllt die Funktion $t \mapsto (f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1))$ die Rekursion (2). Wenn umgekehrt g die Rekursionsgleichung (2) erfüllt, dann erfüllt jeder ihrer k Komponenten die Rekursion (3).

1.1 Lineare Rekursionen

Es sei nun X ein reeller Vektorraum. Eine nicht-autonome Rekursion gegeben durch eine Funktion $F : (X^k \times T) \rightarrow X$ heißt linear, wenn für jedes $t \in T$ die Funktion $(x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto F(x_0, \dots, x_{k-1}, t)$ linear ist. Die Lösungen bilden einen Vektorraum der Dimension $k \dim(X)$; die Abbildung, die jedem k -Tupel von Anfangswerten $(x_0, \dots, x_{k-1}) \in X^k$ die eindeutig bestimmte Lösung der Rekursion mit diesen Anfangswerten zuordnet, ist ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Die oben beschriebene Rückführung auf eine Rekursion erster Ordnung liefert in der Tat eine lineare Rekursion erster Ordnung. Beschränken wir uns daher (vorläufig) auf lineare Rekursionen erster Ordnung. Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann kann man die Funktion F auch schreiben als matrix-wertige Funktion $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, also $F(x_0, \dots, x_{k-1}, t) := A(t) \cdot (x_0, \dots, x_{k-1})$. Der Vektorraum-Isomorphismus zwischen Anfangswerten und Lösungen läßt sich ebenfalls als matrix-wertige Funktion $B \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ schreiben. Die Lösung $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Rekursion

$$\forall t \in T : f(t+1) = A(t)f(t)$$

läßt sich dann schreiben als

$$g(t) = B(t)(g(0), \dots, g(k-1)).$$

Die Matrix B erfüllt die Gleichungen

$$\forall t : B(t+1) = A(t)B(t), \quad B(0) = I_n.$$

Die Matrix $B(t)$ kann berechnet werden durch Aufmultiplizieren der Matrizen $A(0), \dots, A(t-1)$ von rechts nach links.

Im autonomen Fall ist das alles viel einfacher: statt einer matrix-wertigen Funktion haben wir eine einzige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und $B(t) = A^t$. Diesen Fall werden wir später noch genauer studieren.

Bemerkung 1.1. Wie erwähnt, lassen sich nicht-autonome Rekursionen immer auf autonome Rekursionen zurückführen. Leider wird bei dieser Reduktion die Linearität nicht beibehalten, drum ist die Theorie der nicht-autonomen linearen Rekursionen (bzw. im kontinuierlichen Fall die Theorie der nicht-autonomen linearen Differentialgleichungen) komplizierter als die Theorie der autonomen linearen Rekursionen (bzw. der autonomen linearen Differentialgleichungen).

Wenn nichts dazugesagt wird, verstehen wir unter einer “linearen Rekursion” eine homogene lineare Gleichung. Die inhomogene lineare Rekursion für $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ sieht so aus:

$$\forall t \in T : f(t+1) = A(t)f(t) + b(t),$$

wobei $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine gegebene matrixwertige Funktion und $b : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine gegebene vektorwertige Funktion ist. Es ist nicht schwierig, eine solche inhomogene Rekursion zurückzuführen auf eine homogene lineare Rekursion für $g : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$; die ersten n Komponenten dieser neuen Rekursion bilden f , und die letzte ist konstant 1.

2 Kontinuierliche Dynamische Systeme

Hier ist $T = \mathbb{R}$ oder eine zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R} (also ein Intervall); X ist wieder ein endlich-dimensionaler reellen Vektorraum oder eine Teilmenge eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums. Eine Funktion $f : T \rightarrow X$ wird in diesem Fall beschrieben durch eine Differentialgleichung der Ordnung $k > 0$:

$$\forall t \in T : f^{(k)}(t) = F(f(t), f'(t), \dots, f^{(k-1)}(t), t), \quad (4)$$

wobei $F : (X^k \times T) \rightarrow X$ eine gegebene stetige Funktion ist. Im Unterschied zum diskreten Fall ist überhaupt nicht klar, ob die Funktion durch Anfangswerte eindeutig festgelegt ist. Der fundamentale Satz von Picard/Lindelöf, den wir beweisen und ausführlich werden, besagt, daß unter gewissen Voraussetzungen für F die Lösung f der Differentialgleichung eindeutig durch die Anfangswerte $f(0), f'(0), \dots, f^{(k-1)}(0)$ festgelegt ist, und auch daß für gegebene Anfangswerte immer eine Lösung existiert.

In anderer Hinsicht ist die Theorie der kontinuierlichen Systeme dafür wieder einfacher als die diskrete Theorie. Zum Beispiel kann man im kontinuierlichen Fall sehr einfach “die Zeit umdrehen” und ein lineares System aufstellen, das in die Vergangenheit schaut. Man braucht dazu nur in der Differentialgleichung t durch $-t$ ersetzen. Im diskreten Fall kann man die Rekursionen nicht nach rückwärts verfolgen, weil zum Beispiel die Funktion $F : X \rightarrow X$ in der Rekursion $\forall t : f(t+1) = F(f(t))$ im allgemeinen nicht invertierbar ist.

Die oben besprochenen Rückführungen für den diskreten Fall lassen sich auch auf den kontinuierlichen Fall übertragen. So kann man eine nicht-autonome Differentialgleichung für $f : T \rightarrow X$

$$\forall t \in T : f'(t) = F(f(t), t)$$

zurückführen auf eine autonome Gleichung für $g : T \rightarrow X \times T$. Und man kann eine Differentialgleichung der Ordnung k für $f : T \rightarrow X$

$$\forall t \in T : f^{(k)}(t) = F(f(t), f'(t), \dots, f^{(k-1)}(t)), \quad (5)$$

auf eine Differentialgleichung erster Ordnung für $g : T \rightarrow X^k$ zurückführen. Im letzteren Fall bleibt Linearität erhalten, im ersteren nicht.

3 Zusammenhang zwischen diskreten und kontinuierlichen Systemen

Es gibt mehrere Querverbindungen zwischen dem diskreten und dem kontinuierlichen Fall.

- Falls in einer autonomen Differentialgleichung Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für $f : \mathbb{R} \rightarrow X$

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = F(f(t))$$

erfüllt ist, haben wir für jede Schrittweite $h > 0$ eine Funktion $G : X \rightarrow X$, sodass für alle $t \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(t+h) = G(f(t))$ gilt. Die Funktion G berechnet also den Wert nach Zeiteinheit h und stellt eine Diskretisierung der Differentialgleichung dar. Die Lösungen der Rekursion für $g : \mathbb{N} \rightarrow X, \forall t \in \mathbb{N} : g(t+1) = G(g(t))$ sind Folgen $(f(t_0), f(t_0+h), f(t_0+2h), \dots)$ von Funktionswerten der Lösung der Differentialgleichung.

- Für kleine numerische Werte von h kann ein G wie oben approximativ berechnet werden. Auf diese Weise erhält man numerische Verfahren zum Auswerten von Lösungen von Anfangswertproblemen.
- Wenn die Lösungen einer Differentialgleichung bei 0 analytisch sind – das heißt, dass alle Ableitungen bei 0 existieren und die Taylorreihe in einem geeigneten Konvergenzbereich gegen die Funktion konvergiert –, dann bilden die Ableitungen bei 0 eine Folge. Diese Folge erfüllt eine Rekursion, die sich oft direkt aus der Differentialrechnung berechnen läßt.
- Umgekehrt kann man aus einer Folge, die eine Rekursion löst, eine Potenzreihe bilden und hoffen, daß die Potenzreihe konvergiert. Wenn ja, dann erfüllt sie oft eine Differentialgleichung, die sich direkt aus der Rekursion ableiten läßt.
- Bei der qualitativen Beschreibung von Lösungen von Differentialgleichung für $t \rightarrow \infty$ gibt es eine wichtige Methode, die wir noch diskutieren werden: man bildet eine Durchschnittsmenge $H \subset X$ und untersucht die Folge der Schrittpunkte einer Lösung in der zeitlichen Reihenfolge. Diese Folge erfüllt ebenfalls eine Rekursion, und qualitative Eigenschaften dieser Rekursion hängen eng zusammen mit qualitativen Eigenschaften der zu untersuchenden Differentialgleichung.

4 Skalare autonome Differentialgleichungen

Hier ist $T = \mathbb{R}$. Gegeben ist eine stetige Funktion $F : T \rightarrow X$, und gesucht ist $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, sodaß

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = F(f(t)) \tag{6}$$

gilt. Bevor wir uns konkreten Lösungsverfahren zuwenden, wollen wir versuchen, qualitativ etwas über die Lösung auszusagen ohne die Lösung tatsächlich zu berechnen. Numerische und exakte Methoden zur Lösung werden später noch besprochen.

Das asymptotische Verhalten der Lösung wird durch das Vorzeichen von F bestimmt: wenn für ein $t_0 \in T$ der Wert $F(f(t_0))$ positive bzw. negativ ist, dann ist die Funktion bei t_0 streng monoton steigend bzw. fallend. Wenn die Menge der Nullstellen von F diskret ist, können wir X unterteilen in offene Intervalle, in denen F positiv oder negativ ist, und deren Randpunkte, nämlich die Nullstellen.

Es sei zunächst $x_0 \in X$ eine Nullstelle von F . Dann ist die konstante Funktion $f : t \rightarrow x_0$ eine Lösung der Differentialgleichung. Mit den Begriffen, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden, wird der Punkt x_0 als “Gleichgewichtspunkt” oder “Equilibrium” bezeichnet.

Beispiel 4.1. Es sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die “logistische Funktion” $x \mapsto x(1-x)$. Die entsprechende Differentialgleichung für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\forall t : f'(t) = f(t)(1-f(t))$$

wird verwendet zur Beschreibung einer Population. Solange die Bevölkerung $f(t)$ im Verhältnis zu 1 klein ist, ist die Änderungsrate proportional zu x . Wenn $f(t)$ aber in die Nähe des Schwellwerts 1 kommt, wird das Wachstum kleiner und kann für $f(t) > 1$ auch negativ werden.

Die Differentialgleichung besitzt genau zwei Equilibrien, bei denen die Bevölkerung konstant bleibt, nämlich $f_1(t) = 0$ und $f_2(t) = 1$.

Ein wenig schwieriger, aber immer noch leicht zu verstehen, ist die Situation im folgenden Satz:

Satz 4.2. *Es sei $x_0 \in X$ eine Nullstelle von F . Es sei (a, x_0) ein Intervall, in dem F positiv ist ($a = -\infty$ ist erlaubt). Es sei (x_0, b) ein Intervall, in dem F negativ ist. Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung, sodaß $f(0) \in (a, b)$ ist. Dann gilt $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = x_0$ (insbesondere existiert der Grenzwert).*

Beweis. Wir definieren die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto (f(t) - x_0)^2$. Weil f differenzierbar ist – schliesslich ist f ja eine Lösung der Differentialgleichung, ist auch g differenzierbar. Außerdem gilt für alle t

$$g'(t) = 2f'(t)(f(t) - x_0) = 2F(f(t))(f(t) - x_0),$$

und dieser Wert ist in einer Umgebung von $t = 0$ negativ: wenn nämlich $(f(t) - x_0)$ positiv ist, ist $F(f(t))$ negativ, und wenn $(f(t) - x_0)$ negativ ist, ist $F(f(t))$ positiv. Daher ist die Funktion bei 0 monoton fallend, das heißt der Abstand des Funktionswertes zum Equilibrium wird kleiner. Es kann dann auch nicht passieren, daß der Wert von f aus dem Intervall herauskommt, und die Funktion g ist auf ganz \mathbb{R}_+ monoton fallend. Dann ist auch f monoton steigend oder fallend, je nachdem ob $f(0)$ größer oder kleiner als x_0 ist. Daraus folgt auch, daß der Grenzwert $x_1 := \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existiert. Wir müssen noch zeigen, daß $x_1 = x_0$ ist.

Da f bei x_1 eine waagrechte Asymptote hat, gilt

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(f(t)) = F(\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)) = F(x_1).$$

Die einzige Nullstelle von F , die noch näher bei x_0 liegt als $f(0)$, ist aber x_0 selbst. □

Im obigen Beispiel sind die Voraussetzungen für das Equilibrium $x_0 = 1$ erfüllt, daher konvergiert der Funktionswert für alle Startwerte in $(0, \infty)$ gegen 1.

5 Stabile und Asymptotisch Stabile Equilibrien

Im Satz (4.2) wird eine Situation beschrieben, die man gerne verallgemeinern möchte: “stabile Equilibrien” sollten Umgebungen besitzen, sodaß Lösungen mit Startwert in der Umgebung nicht mehr aus dieser Umgebung ausbrechen und schlussendlich gegen das Equilibrien konvergieren. Leider läßt sich so eine Umgebung, aus der es kein Entkommen mehr gibt, nicht immer (und wenn, dann auch nur schwer) nachweisen. Es erweist sich, daß man sich das Leben langfristig leichter macht, wenn man eine zusätzliche “Analysis-Klausel” in die Definition einbaut.

Es sei $n > 0$. Es sei X eine offene Menge in \mathbb{R}^n und $x_0 \in X$ ein Punkt. Es sei $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Richtungsfeld, welches ein kontinuierliches dynamisches System durch die Differentialgleichung $\forall t : f'(t) = F(f(t))$ für $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ beschreibt.

Definition 5.1. Wenn $F(x_0) = 0$ ist, dann nennen wir x_0 ein Equilibrium für das dynamische System beschrieben durch F .

Wie schon erwähnt, ist für jedes Equilibrium x_0 die konstante Funktion $f(t) = x_0$ eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert x_0 .

Definition 5.2. Es sei x_0 ein Equilibrium. Wir nennen es ein stabiles Equilibrium, wenn für jede Umgebung U von x_0 eine Umgebung V von x_0 existiert, sodaß für jede Lösung f der Differentialgleichung mit Startwert $f(0) \in V$ ein $t_1 > 0$ existiert, sodaß $f(t) \in U$ gilt für alle $t > t_1$.

Ein Beispiel, bei dem die Analysis-Klausel schlagend wird, ist das dynamische System auf $X = \mathbb{R}^1$ gegeben durch die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t) = t \sin(1/t)$ (für $t \neq 0$ definiert, in den Wert $t = 0$ stetig durch $F(0) = 0$ fortgesetzt). Die Equilibrien sind 0 und die Zahlen $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Für ungerade k ist die Voraussetzung von Satz (4.2) erfüllt, und diese Gleichgewichtspunkte sind

daher auch stabil. Für gerade k haben wir eine zeitliche Umkehrung der Stabilität: die Lösungen in der Nähe driften vom Gleichgewichtspunkt weg. Diese sind also nicht stabil. Der interessanteste Gleichgewichtspunkt ist der Nullpunkt. In jeder Umgebung dieses Gleichgewichtspunkts befinden sich sowohl stabile als auch instabile Equilibrien vom vorigen Typ. Jede nichtkonstante Lösung wird von einem stabilen Equilibrium eingefangen, und zwar von einem der nicht weit weg vom Startwert ist (zumindest durch kein anderes Equilibrium getrennt). Für jede Umgebung U von 0 können wir daher eine Umgebung von V angeben, sodass U sowohl V als auch alle Equilibrien enthält, die mit die Lösungen mit Startwert in V einfangen. Mit anderen Worten: 0 ist ein stabiles Equilibrium.

Der Begriff Stabilität drückt zwar das “Nicht-Ausbrechen” aus, aber nicht die Limes-Eigenschaft. Wir definieren daher zusätzlich:

Definition 5.3. Es sei x_0 ein stabiles Equilibrium. Wir nennen es asymptotisch stabil, wenn eine Umgebung W von x_0 existiert, sodaß jede Lösung mit Startwert in W gegen x_0 konvergiert.

Wenn die Voraussetzungen von Satz (4.2) erfüllt sind, dann haben wir ein asymptotisch stabiles Equilibrium, wie man sich leicht überlegen kann. Im Beispiel vorhin ist das stabile Equilibrium bei 0 nicht asymptotisch stabil: die Grenzwerte existieren zwar immer, aber sind in der Regel andere Equilibrien (solche mit ungeraden k). Wir haben aber noch ein viel einfacheres Beispiel eines stabilen, aber nicht asymptotisch stabilen Equilibriums, nämlich für das Richtungsfeld $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto 0$. Jeder Punkt ist ein Equilibrium, alle Equilibrien sind stabil, keines davon ist asymptotisch stabil.

In der Mathematik versuchen wir bei den Definitionen, so wenig wir möglich zu verlangen. Bei der Definition der asymptotischen Stabilität könnte man meinen, daß die Voraussetzung der Stabilität vielleicht überflüssig ist: es könnte sein, dass aus der Aussage

es existiert eine Umgebung W von x_0 , sodaß jede Lösung mit Startwert in W gegen x_0 konvergiert

schon die Stabilität von x_0 folgt. Im Fall $X \subset \mathbb{R}^1$ kann man zeigen, dass das tatsächlich der Fall ist: wenn die obige Aussage erfüllt ist, dann können sich die Nullstellen von F nicht bei x_0 häufen, sonst hätte jede mögliche Umgenung W ein weiteres Equilibrium und damit eine Lösung, die nicht gegen x_0 konvergiert. Die Voraussetzung von Satz (4.2) ist daher erfüllt, und damit haben wir Stabilität. Wir werden aber später zwei-dimensionale dynamische Systeme sehen, die ein Equilibrium haben, welches die obige Aussage erfüllt, die aber nicht stabil sind (und daher auch nicht asymptotisch stabil).

Das Phasenportrait ist eine graphische Darstellung eines dynamischen Systems, in dem die einzelnen Lösungen als Kurven in X dargestellt werden, und die Durchlaufrichtung der Kurve mit einem Pfeil bezeichnet wird. Die Kurven bzw. Punkte (im Fall von Equilibrien) nennen wir auch *Bahnen*. Voraussetzung für das Erstellen des Phasenprorraits sind die Eindeutigkeit (Bahnen sind disjunkt) und zumindest lokale Existenz (jeder Punkt hat eine Bahn) von Lösungen. Wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, bilden die Bahnen eine Partition von X .

Im Fall $X \subset \mathbb{R}^1$ kann man das Phasenportrait zeichnen der Differentialgleichung für $f : T \rightarrow X, \forall t : f'(t) = F(f(t))$ zeichnen, wenn man die Nullstellen von F kennt und das Vorzeichen des Wertes von F in den Intervallen zwischen den Nullstellen. Die Nullstellen entsprechen konstanten Lösungen und werden als Punkte dargestellt. Die Intervalle sind ebenfalls Bilder von Lösungskurven. Die Richtung ist aufwärts in Intervallen, in denen F positiv ist, und abwärts in Intervallen, in denen F negativ ist.

6 Bifurkationen

Angenommen, wir haben ein dynamisches System, das stetig von einem (oder mehreren) Parameter abhängt. Welchen Einfluss haben kleine Änderungen der Parameter auf Stabilitäts-Eigenschaften



Abbildung 1: Phasenporträt der logistischen Differentialgleichung $f'(t) = f(t)(1 - f(t))$. Der Bildraum wird besteht aus 5 Bahnen. Zwei davon sind Punkte, der Punkt 1 ist asymptotisch stabil.

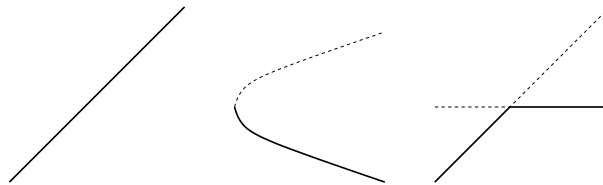


Abbildung 2: Bifurkationsdiagramme für die parameterabhängigen Differentialgleichungen $f'(t) = -f(t) + \lambda$, $f'(t) = f(t)^2 - \lambda$, $f'(t) = f(t)(f(t) - \lambda)$. Stabile Equilibrien sind fett durchgezeichnet, die anderen strichliert.

der Equilibrien? Diese Fragestellung wird im Lauf der Vorlesung noch ausführlich behandelt; an dieser Stelle nur eine Vorschau auf den Begriff der Bifurkation mit einigen Beispielen.

In den folgenden Beispielen gehen wir von einer stetigen Funktion $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$ aus. Für ein fixes $\lambda \in \mathbb{R}$ sei F_λ die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto F(\lambda, x)$. Diese definiert die parameterabhängige Differentialgleichung für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : f'(t) = F_\lambda(f(t)).$$

Beispiel 6.1. Wir beginnen mit $F_\lambda(x) = -x + \lambda$. Dieses System hat für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ genau ein Equilibrium, und zwar bei λ . Die Voraussetzungen von Satz 4.2 sind erfüllt, also ist das Gleichgewicht asymptotisch stabil. Das Equilibrium ändert zwar die Position, aber der Typ bleibt unverändert, wenn man den Parameter ändert. Dieses Phänomen werden wir später als *strukturell stabil* bezeichnen.

Beispiel 6.2. (Sattelnoden) Das nächste Beispiel ist $F_\lambda(x) = x^2 - \lambda$. Für $\lambda < 0$ gibt es keine Equilibrium. Für $\lambda > 0$ existieren zwei Equilibrien bei $\pm\sqrt{\lambda}$. Das Equilibrium bei $-\sqrt{\lambda}$ ist asymptotisch stabil, das andere nicht. Im Grenzfall $\lambda = 0$ haben wir ein Equilibrium, welches "halbseitig stabil" ist: Bahnen von unten konvergieren, Bahnen von oben nicht.

Beispiel 6.3. (transkritisch) Nun sei $F_\lambda(x) = x(x - \lambda)$. Hier gibt es für fast alle λ zwei Equilibrien bei 0 und bei λ , außer bei $\lambda = 0$, wo beide zusammenfallen. Beim Übergang von negativen zu positiven Parametern wechseln die Equilibrien den Typ: für negative λ ist das Equilibrium bei λ stabil und das bei 0 nicht. Für positive λ ist es umgekehrt.

Im Bifurkationsdiagramm verwenden wir λ und x als Koordinaten. Die Nullstelle von F in der (λ, x) -Ebene ist im allgemeinen eine Kurve. Wir zeichnen die Teile der Kurve, die stabilen Equilibrien entsprechen, mit dicker Strichstärke, und die anderen Teile strichliert. Die Regel ist: wenn unterhalb eines Kurvenzweiges die Funktion F positiv ist und oberhalb negativ, dann wird dieser Teil dick gezeichnet, sonst strichliert.

7 Lösungsverfahren

Es gibt Anekdoten von Mathematikern, die mit einem rechnerischen Problem konfrontiert werden, eine Nacht lang nachdenken und danach stolz verkünden: “ich habe gezeigt, dass eine Lösung existiert”. Meistens bleibt der Applaus aus; man erwartet sich oft mehr. Doch was heißt das eigentlich genau, eine Gleichung lösen?

Ein eklatanter Fall ist die allgemeine Gleichung vierten Grades für $x \in \mathbb{C}$:

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

wobei $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ gegeben sind. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren 4 Lösungen, die auch zusammenfallen können. Die Formel von Ferrara ist ein Ausdruck für die Lösung, der neben den arithmetischen Operationen $(+, -, \cdot, :)$ auch Wurzeln enthält. Die Wurzel ist im komplexen eine mehrdeutige Operation, und bei der richtigen Wahl der Auswertung bekommt man die 4 Lösungen.

Es besteht also kein Zweifel, dass die Formel von Ferrara die obige Gleichung vollständig löst. Auf der anderen Seite wird die Formel kaum verwendet zum numerischen Berechnen der Lösung, und zwar aus zwei Gründen. erstens ist die Formel kompliziert und die Wurzeln sind im komplexen nicht leicht auszuwerten (zu Ferrara’s Zeiten verwendete man dazu Winkelfunktionen). Zweitens steht ein einfaches numerisches Näherungsverfahren zur Verfügung, das schnell konvergiert, nämlich das Newton-Verfahren. Ist dann nicht die Newton-Methode gemeinsam mit dem Fundamentalsatz der Algebra, der die Existenz und Anzahl der Lösungen garantiert, nicht eine bessere “Lösung” als Ferrara’s Formel?

Im Fall von dynamischen Systemen ist nicht eine Zahl, sondern eine Funktion gesucht, das macht die Frage, was “Lösung” bedeutet, auch nicht gerade einfacher. Wenn wir uns die Option einer numerischen Lösung offenhalten wollen, liegt folgende Definition nahe: *eine Differentialgleichung für f ist gelöst, wenn wir zu einem gegebenen Anfangswert $f(0)$ und zu einer gegebenen Stelle τ die Zahl $f(\tau)$ berechnen können, sei es mit einer Formel oder mit einem numerischen Näherungsverfahren.*

Wenden wir die gleiche Definition auch für die Rekursion für $f : \mathbb{N} \rightarrow X$: $f(t+1) = F(f(t))$ an, dann ist die Rekursion selbst auch schon eine Lösung, weil sie als rekursiver Algorithmus gelesen werden kann.

Für Differentialgleichungen ist die Sache nicht so einfach. Sei $n \in \mathbb{N}$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$; und wir wollen die Differentialgleichung

$$\forall t : f'(t) = F(f(t))$$

für $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ lösen. Sei $\tau > 0$. Im Eulersche Polygonzugverfahren wählen wir zunächst $N \in \mathbb{N}$ – je größer N , desto höher ist der Rechenaufwand, aber wir erwarten auch eine höhere Genauigkeit – und unterteilen das Intervall $[0, \tau]$ in N Teilintervalle der Länge $h := \frac{\tau}{N}$. Dann definieren wir eine Rekursion für $g_N : \mathbb{N} \rightarrow X$

$$\forall t : g_N(t+1) = g_N(t) + hF(g_N(t))$$

hoffend dass die rechte Seite in X liegt. Wenn nicht, bricht das Verfahren mit einer Fehlermeldung ab (das kann nicht passieren wenn $X = \mathbb{R}^n$ ist). Als Startwert setzen wir $g_N(0) = f(0)$, den gegebenen Startwert von f . Und der Näherungswert von $f(\tau)$ ist $g_N(N)$ – allgemeiner, für alle $i \geq 0$ ist $g_N(i)$ ein Näherungswert für $f(hi)$.

Zwei schwerwiegende Einwände muss man an dieser Stelle machen. Erstens ist noch gar nicht ausgemacht, dass überhaupt ein Lösung f mit dem abgegebenen Startwert existiert. Und zweitens, selbst wenn die Lösung existiert und eindeutig ist, dann ist auch nicht klar, ob $\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(N)$ existiert und gleich $f(\tau)$ ist. Beide Fragen werden an späterer Stelle noch behandelt werden.

8 Symbolische Lösungen

Das Beispiel der Gleichung vierten Grades war nicht typisch: mitunter sind Lösungsformeln einfacher und schneller auswertbar als numerische Verfahren (wenn man weiß wie man sie findet). Das

Entwickeln von Algorithmen zum Berechnen von Lösungsformeln ist Aufgabe der mathematischen Disziplin "Symbolisches Rechnen". Es ist natürlich nicht so, dass immer eine Lösungsformel existiert. Ob das so ist, hängt von der Sprache ab, die man vorher definieren muss und die genau festlegt was eine Formel ist.

Ein berühmtes Beispiel aus der Algebra ist die allgemeine Gleichung fünften Grades für $x \in \mathbb{C}$:

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

wobei $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$ gegeben sind. Abel/Ruffini/Galois haben gezeigt, dass es keine Lösungsformel gibt, die aus den arithmetischen Operationen und Wurzeloperationen besteht.

Ein oft verwendeter Begriff einer Formel ist die Menge der elementaren Funktionen: eine Funktion einer Teilmenge von \mathbb{C} nach \mathbb{C} heißt elementar, wenn sie sich ausdrücken lässt durch arithmetische Operationen, Exponentialfunktionen und Logarithmen (Wurzelfunktionen braucht man nicht, weil die sich mit Exponentialfunktionen und Logarithmen ausdrücken lassen). Diese Klasse von Funktionen ist relativ eingeschränkt, und viele Gleichungen sind mit diesem Formelbegriff unlösbar, etwas das Invertieren von Funktionen, das auf eine algebraische Gleichung führt. Auch Integrationsprobleme und damit Differentialgleichungen sind manchmal unlösbar, etwa die Gleichung für f

$$\forall t : f'(t) = e^{t^2}. \tag{7}$$

Die elementare Funktion $t \mapsto e^{t^2}$ hat keine elementare Stammfunktion.

Ein Satz von Lieuville gibt Aufschluss darüber, wie Stammfunktion einer elementaren Funktion ausschaun muss, falls überhaupt eine existiert. Die untenstehende Formulierung ist etwas salopp; die genaue Formulierung ist technisch aufwändig, und wir sparen sie ein, weil wir sowieso in dieser Vorlesung nicht mit diesem Satz arbeiten werden.

Satz 8.1. *Es sei f eine elementare Funktion und F eine elementare Stammfunktion. Dann treten als Argumente von Exponentialfunktionen in F nur solche Ausdrücke auf, die auch schon als Argumente von Exponentialfunktionen in f auftreten; und als Argumente von Logarithmen in F treten entweder Ausdrücke auf, die auch schon als Argumente von f in Logarithmen auftreten, oder in f im Nenner eines Bruches stehen; im zweiten Fall ist F eine lineare Funktion von diesem Logarithmus.*

Der Beweis des Satzes von Lieuville (den wir hier nicht angeben) ist konstruktiv. Er liefert einen Algorithmus, der entscheidet, ob eine gegebene elementare Funktion eine Stammfunktion hat, und berechnet diese im Fall dass sie existiert.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Unterklasse der rationalen Funktionen, also Funktionen, die sich nur durch arithmetische Operationen darstellen lassen. Diese haben immer elementare Stammfunktionen, und nach dem Satz von Lieuville treten keine Exponentialfunktionen, nur Logarithmen von Faktoren des Nenners. Mit Hilfe der Methode der Partibruchzerlegung kann eine elementare Stammfunktion berechnet werden (siehe Skriptum für Analysis).

Würde man die Sprache erweitern und zusätzlich zu arithmetischen Operationen, Exponentialfunktion und Logarithmus auch noch unbestimmte Integrale zulassen und Funktionen, die sich in dieser Sprache schreiben lassen, etwa "intelementare Funktionen" nennen, dann hat man natürlich überhaupt kein Problem, die Gleichung (7) zu lösen: $f(x) = \int e^{x^2} dx$. Allgemein hat jede intelementare Funktion g eine intelementare Stammfunktion, nämlich $\int g(x) dx$.

8.1 Trennung der Variablen

Es seien $T \subset \mathbb{R}$ und $X \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $a : X \rightarrow \mathbb{R}^*$ und $b : T \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen (zur Erinnerung: wenn K ein Körper ist, dann ist K^* die Menge aller Elemente ungleich 0). Wir lösen die nichtautonome Differentialgleichung für $f : T \rightarrow X$

$$\forall t : f'(t) = \frac{b(t)}{a(f(t))}$$

durch Rückführung auf Integration und Funktionsumkehrung.

Es seien $A := \int a$ und $B := \int b$ Stammfunktionen von a und b . Da die $A'(x) \neq 0$ ist für alle $x \in X$, ist $A : X \rightarrow Y$ invertierbar, wenn Y die Bildmenge von A ist.

Satz 8.2. *In der Notation wie oben ist $A^{-1} \circ B$ eine Lösung. Umgekehrt läßt sich jede Lösung schreiben als $t \mapsto A^{-1}(B(t) + c)$ für eine geeignete Zahl $c \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Es sei h eine differenzierbare Funktion von T nach X . Dann ist $A \circ h$ genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$(A \circ h)' = (A' \circ h) \cdot h' = (a \circ h) \cdot \frac{b}{a \circ h} = b$$

ist, also genau dann wenn $A \circ h$ eine Stammfunktion von b ist (zum Beispiel B). □

Man beachte, dass die Lösung $g = A^{-1} \circ B$ nicht in ganz T definiert sein muss: damit g beim Wert t definiert ist, muss $B(t)$ in Y liegen (dem Definitionsbereich von A^{-1}). Wenn zusätzlich zur Differentialgleichung eine Anfangsbedingung $f(t_0) = x_0$ gegeben ist, wobei $t_0 \in T$ und $x_0 \in X$ ist, dann ist die Konstante $c = A(x_0) - B(t_0)$ eindeutig festgelegt. Wenn also überhaupt eine Lösung existiert, dann ist diese eindeutig.

Bemerkung 8.1. Es gibt Beispiele, bei denen das Anfangswertproblem keine Lösung hat, die auf ganz T definiert ist (etwa Übung 3, Beispiel 4a). Wenn T und X offen sind, dann gibt es aber immer lokal eine Lösung, d.h. es existiert eine Umgebung von t_0 , auf der die Lösung definiert ist. *Beweis:* Damit die Lösung $t \mapsto A^{-1}(B(t) + A(x_0) - B(t_0))$ für t definiert ist, muss $B(t) + A(x_0) - B(t_0)$ in Y liegen. Für $t = t_0$ ist das der Fall. Nachdem A streng monoton ist, ist $Y = A(X)$ ebenfalls offen. Es sei $V := \{y - A(x_0) + B(t_0) \mid y \in Y\}$; diese Menge ist auch offen. Weil B stetig ist, ist das Urbild $U := B^{-1}(V)$ wieder offen. Weil $B(t_0) \in V$ gilt, ist U eine offene Umgebung von t_0 . Für $t \in U$ ist $B(t) \in V$, daher ist $B(t) + A(x_0) - B(t_0) \in Y$, daher ist die Lösung für t definiert.

Zwei wichtige Spezialfälle sind der autonome Fall und der lineare Fall. Im autonomen Fall ist $X = \mathbb{R}$, $t_0 = 0$, und b die konstante Funktion 1. Im Anfangswertproblem bei der allgemeinen autonomen Differentialgleichung für f

$$\forall t : f'(t) = F(f(t))$$

können wir daher zwei Fälle unterscheiden: entweder ist $f(0)$ ungleich 0, dann können wir eine die Methode TdV anwenden. Oder $f(0) = 0$, dann existiert auf jeden Fall eine konstante Lösung. In einem Übungsbeispiel haben wir gesehen, dass die Lösung im zweiten Fall nicht eindeutig sein muss

Der zweite Spezialfall ist die lineare Gleichung. Hier ist $X = \mathbb{R}$ und die Gleichung für f ist

$$\forall t : f'(t) = b(t)f(t).$$

Wenn der Startwert $f(x_0) \neq 0$ ist, dann verkleinern wir X auf \mathbb{R}^* , setzen $a : X \rightarrow \mathbb{R}$ als $x \rightarrow \frac{1}{x}$ und können die allgemeine Lösung hinschreiben:

$$f(t) = e^{B(t)+c} = c_1 e^{B(t)};$$

wenn man die Stammfunktion B gleich $t \mapsto \int_{t_0}^t b(s)ds$ ist, dann ist c_1 gleich dem Startwert x_0 . Die Lösung ist auf ganz \mathbb{R} definiert und nimmt hat keine Nullstellen.

Wenn der Startwert gleich 0 ist, dann hat man die konstante Lösung $f(t) = 0$. Sie ist auch die einzige, weil alle anderen Lösungen keine Nullstellen haben.

Es sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Euler-homogene Differentialgleichung für $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : f'(t) = F\left(\frac{f(t)}{t}\right)$$

läßt sich durch die Substitution $f(t) = tg(t)$ auf eine Differentialgleichung für g zurückführen, für die an TdV anwenden kann (Übung).

Hier noch ein Trick, der hilft, TdV anzuwenden ohne die Formel auswendig zu lernen. Er besteht aus Umformungen der Differentialgleichung in Pseudo-Geichungen, die zwar mit einem Gleichheitszeichen ausgestattet sind, aber deren beide Seiten nicht immer sinnvolle mathematische Ausdrücke sind.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{b(t)}{a(f(t))} \\ \frac{df}{dt} &= \frac{b(t)}{a(f)} \\ a(f)df &= b(t)dt \\ \int a(f)df &= \int b(t)dt \\ A(f) &= B(t) + c \\ f &= A^{-1}(B(t) + c) \end{aligned}$$

8.2 Reduktion der Ordnung

Wir führen nun eine autonome Differentialgleichung zweiter Ordnung auf eine Differentialgleichung erster Ordnung, im allgemeinen nicht autonom. Für allgemeine Differentialgleichungen erster Ordnung gibt es keine symbolische Lösung, aber in manchen Fällen lässt sich dann TdV anwenden. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetigs; wir untersuchen die Differentialgleichung für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : f''(t) = F(f(t), f'(t)).$$

Wir nehmen an, dass $f'(t_0) \neq 0$ ist. Dann ist f lokal invertierbar und es existiert lokal eine Funktion $g : U \rightarrow \mathbb{R}$, U eine Umgebung von $f(t_0)$, sodass $f'(t) = g(f(t))$ gilt, wann immer die rechte Seite definiert ist. Wir leiten nun beide Seiten der Gleichung $f'(t) = g(f(t))$ ab und verwenden die Differentialgleichung:

$$F(f(t), g(f(t))) = F(f(t), f'(t)) = f''(t) = g'(f(t))f'(t) = g'(f(t))g(f(t)).$$

In dieser Gleichung kommt t nur als Argument von f vor. Wir setzen $s := f(t)$ und erhalten

$$F(s, g(s)) = g'(s)g(s).$$

Das ist eine Differentialgleichung für g . Wenn F nicht von der zweiten Variable abhängt, dann kann TdV anegewandt werden und man bekommt eine Lösung für g . Um f zu finden, muss man in einem zweiten Schritt nch die Gleichung $f'(t) = g(f(t))$ lösen; hier greift TdV ebenfalls.

Wenn man von einer linearen Differentialgleichung eine Lösung kennt, kann man die Ordnung ebenfalls reduzieren. Es sei $k \in \mathbb{N}$, $T \subset \mathbb{R}$, und $a_0, \dots, a_{k-1} : T \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für die Differentialgleichung für $f : T \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : f^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)f^{(k-1)}(t) + \dots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = 0 \quad (8)$$

brauchen wir eine Lösung $f_0 : T \rightarrow \mathbb{R}$, die auf T keine Nullstellen hat; nennen wir sie $f_1 : T \rightarrow \mathbb{R}$. Wir ersetzen $f(t)$ durch $f_1(t)g(t)$ und berechnen eine Differentialgleichung für $g : T \rightarrow \mathbb{R}$. Nach Anwenden der Prouktregel und Ausmultiplizieren aller Klammern werden alle Terme weggekürzt, in denen g nicht abgeleitet wird. Das Ergebnis ist eine linear Differentialgleichung der Ordnung $k - 1$ für $g' : T \rightarrow \mathbb{R}$. Wir führen die Rechnung durch für den Fall $k = 2$:

$$0 = (f_1g)'' + a_1(f_1g_1)' + a_0f_1g_1 = (f_1g' + f_1'g)' + a_1f_1g' + a_1f_1'g_1 + a_0f_1g =$$

$$\begin{aligned}
&= f_1 g'' + 2f_1' g' + f_1'' g + a_1 f_1 g' + a_1 f_1' g_1 + a_0 f_1 g = (f_1'' + a_1 f_1' + a_0 f_1)g + f_1 g'' + 2f_1' g' + a_1 f_1 g' = \\
&= f_1 g'' + 2f_1' g' + a_1 f_1 g'.
\end{aligned}$$

Nachdem f_1 keine Nullstellen hat, darf man mit $\frac{1}{f_1}$ multiplizieren und hat eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung, bei der man wie schon erwähnt TdV anwenden kann. Wenn man die allgemeine Lösung g gefunden hat, muss man sie noch integrieren und dann mit f_1 multiplizieren.

Auch wenn man keine Lösung kennt, kann man die Ordnung reduzieren, allerdings erhält man dann eine nichtlineare Differentialgleichung. Wir nehmen an, es existiert eine Lösung f ohne Nullstellen, und erstellen eine Differentialgleichung für $g : T \rightarrow \mathbb{R}$, $g = \frac{f}{f'}$. Wenn wir g gefunden haben, kann f durch TdV gefunden werden.

Zum Auffinden der Gleichung für g schreiben wir die Ableitungen von f in der Form f mal einem Ausdruck in g und seinen Ableitungen:

$$f = f \cdot 1$$

$$f' = f \cdot g$$

$$f'' = f'g + fg' = fg^2 + fg' = f \cdot (g^2 + g')$$

$$f''' = (f \cdot (g^2 + g'))' = f'(g^2 + g') + f(g^2 + g')' = fg(g^3 + g') + f(2gg' + g'') = f \cdot (g^3 + g'' + 3gg')$$

usw.. Dann ersetzt man in Gleichung (8) alle Ableitungen von f durch die rechten Seiten der Gleichungen oben, hebt f heraus und hat die Gleichung für g . Im Fall $k = 2$ lautet das Ergebnis

$$g' + g^2 + a_1 g + a_0 = 0$$

(Riccati-Differentialgleichung). Weil die Rückführung auch umgekehrt funktioniert, kann man auch eine gegebene Riccati-Differentialgleichung auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung reduzieren, hoffend dass man eine Lösung errät und damit auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung reduzieren und TdV anwenden kann.

8.3 Variation der Konstanten

Die Methode der Variation der Konstanten gibts in zwei Variationen, für vektorwertige erster Ordnung und für skalare beliebiger Ordnung. Sie dient zur Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung unter der Annahme, dass man die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Gleichung schon kennt. Im skalaren Fall für Ordnung 1 kann man bekanntlich die homogene Gleichung mit TdV lösen, also hat man durch Teamwork von TdV und VdK ein allgemeines Lösungsverfahren für inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Auch für autonome Differentialgleichungen werden wir Lösungsverfahren für den homogenen Fall angeben, und daher sind auch alle inhomogenen Differentialgleichungen lösbar, bei denen der lineare Anteil nicht von t abhängt.

Der vektorwertige Fall ist einfacher zu erklären, darum fangen wir damit an. Es sei $T \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intervall, $n \in \mathbb{N}$. Es sei $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine matrixwertige stetige Funktion und $b : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion. Wir lösen die inhomogene Differentialgleichung für $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\forall t \in T : f'(t) - A(t)f(t) = b(t)$$

unter der Annahme, dass wir das Anfangswertproblem der homogenen Gleichung für $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\forall t : g'(t) - A(t)g(t) = 0$$

für jeden Anfangswert bei der Anfangsstelle $t_0 \in \mathbb{R}$ lösen können. Die Annahme ist äquivalent zu der, dass wir eine Matrix B kennen, die die Matrix-Differentialgleichung

$$\forall t : B'(t) = A(t)B(t)$$

und die Anfangsbedingung $B(t_0) = I_n$ erfüllt; die Matrix $B(t)$ ist jene lineare Abbildung, die jedem Anfangswert $v_0 \in \mathbb{R}^n$ den Funktionswert $g(t)$ der Lösung zuordnet.

Alles das setzt natürlich voraus, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat; auch das werden wir später für beliebige lineare Differentialgleichungen zeigen. Eine weitere Folgerung aus diesem (später zu zeigenden) Satz ist, dass die Matrix $B(t)$ für alle $t \in T$ invertierbar ist. Die Inverse von $B(t_1)$ ist die Matrix $\bar{B}(t_0)$, wobei $\bar{B}(t)$ der linearen Abbildung entspricht, die jedem Anfangswert v_1 bei t_1 den Wert $f(t)$ der eindeutigen Lösung mit Anfangswert $f(t_1) = v_1$ zuordnet. Wir ersetzen nun in der inhomogenen Gleichung $f(t)$ durch $B(t)h(t)$ und bekommen eine Differentialgleichung für die vektorwertige Funktion $h : T \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} b(t) &= (B(t)h(t))' - A(t)B(t)h(t) = B(t)h'(t) + B'(t)h(t) - A(t)B(t)h(t) = \\ &= B(t)h'(t) + (B'(t) - A(t)B(t))h(t) = B(t)h'(t) \\ &\quad (B(t))^{-1}b(t) = h'(t) \end{aligned}$$

Die Funktion h kann man jetzt durch Integration finden. Um eine Lösung für die Gleichung für f zu finden, muss man noch mit der Matrixfunktion B multiplizieren.

Wir wenden uns dem skalaren Fall beliebiger Ordnung zu. Es sei $T \subset \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_{k-1}, b : T \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir lösen die Differentialgleichung für $f : T \rightarrow \mathbb{R}$

$$f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + a_1f' + a_0f = b \quad (9)$$

(eine Gleichung von Funktionen $T \rightarrow \mathbb{R}$). Wir nehmen an, dass wir k linear unabhängige Lösungen g_1, \dots, g_k der homogenen Gleichung für g

$$g^{(k)} + a_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + a_1g' + a_0g = 0$$

schon kennen. An dieser Stelle könnten wir die Gleichung (9) schon auf zwei Arten lösen:

- Zurückführen auf eine vektorielle Gleichung erster Ordnung und VdK.
- Zurückführen auf eine homogene lineare Gleichung der Ordnung $k+1$, dann k mal Reduktion der Ordnung mit den bekannten Lösungen bis auf eine lineare Gleichung erster Ordnung, dann TdV.

Im ersten Fall hat man eine matrixwertige Funktion zu invertieren. Im wesentlichen läuft es darauf hinaus, ein $k \times k$ Gleichungssystem für unbekannte Funktionen zu lösen. Was wir jetzt machen, ist, dieses Gleichungssystem ohne Umwege hinzuschreiben.

Wir suchen Funktionen $h_1, \dots, h_k : T \rightarrow \mathbb{R}$, sodass deren Ableitungen h'_1, \dots, h'_k die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} g_1h'_1 + \dots + g_kh'_k &= 0 \\ g'_1h'_1 + \dots + g'_kh'_k &= 0 \\ g''_1h'_1 + \dots + g''_kh'_k &= 0 \\ &\dots \\ g_1^{(k-2)}h'_1 + \dots + g_k^{(k-2)}h'_k &= 0 \\ g_1^{(k-1)}h'_1 + \dots + g_k^{(k-1)}h'_k &= b \end{aligned}$$

Die Matrix, die der linken Seite dieses Gleichungssystems entspricht, ist genau die Matrix B (eigentlich: matrixwertige Funktion) in der vektorwertigen Differentialgleichung, auf die man die Gleichung (9) reduzieren kann. Deshalb ist die Matrix auch für alle $t \in T$ invertierbar, und das Gleichungssystem kann nach h'_1, \dots, h'_k aufgelöst werden. Die Funktionen h_1, \dots, h_k können nun durch Integration gefunden werden.

Das Gleichungssystem ist nun gerade so gewählt, dass folgendes gilt. Es sei $f := g_1h_1 + \dots + g_kh_k$. Dann ist

$$f = g_1h_1 + \dots + g_kh_k$$

$$\begin{aligned}
f' &= g_1' h_1 + \dots + g_k' h_k \\
f'' &= g_1'' h_1 + \dots + g_k'' h_k \\
&\dots \\
f^{(k-2)} &= g_1^{(k-2)} h_1 + \dots + g_k^{(k-2)} h_k \\
f^{(k-1)} &= g_1^{(k-1)} h_1 + \dots + g_k^{(k-1)} h_k + b
\end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit a_0 , die zweite mit a_1 usw. (letzte Zeile mit 1) und summieren alles auf. Das Ergebnis ist – nach einigen Umformungen unter Verwendung der Annahme, dass g_1, \dots, g_k die homogene Gleichung lösen – gleich b . Also erfüllt f die Differentialgleichung.

Bernoulli-Differentialgleichung. Es sei $T \subset \mathbb{R}$, $a, b : T \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, $\alpha \in \mathbb{N}$. Die Differentialgleichung für $f : T \rightarrow \mathbb{R}^*$

$$\forall t : f'(t) + a(t)f(t) + b(t)f(t)^n$$

ist für $n \neq 0, 1$ zwar nicht linear, aber sie läßt sich durch die Substitution $f(t) = g(t)^{\frac{1}{1-n}}$ auf eine lineare Gleichung für g zurückführen:

$$0 = \left(g^{\frac{1}{1-n}}\right)' + ag^{\frac{1}{1-n}} + bg^{\frac{n}{1-n}} = \frac{1}{1-n}g^{\frac{n}{1-n}}g' + agg^{\frac{n}{1-n}} + bg^{\frac{n}{1-n}}$$

Nach Herausheben von $g^{\frac{n}{1-n}}$ erhält man die inhomogene lineare Differentialgleichung für g

$$\frac{1}{1-n}g' + ag + b = 0.$$

Diese kann man mit VdK und TdV lösen. Wenn man g hat, dann kriegt man f durch die obige Substitution.

Symbolische Methoden im diskreten Fall. Die Frage der Lösbarkeit mit symbolischen Methoden macht auch für Rekursionen Sinn. Wir werden zum Beispiel im nächsten Abschnitt eine symbolische Lösung für lineare autonome Rekursionen angeben. Für nicht-autonome oder nichtlineare Rekursionen gibt es viele Resultate, aber auch offene Fragen. Führende Experten auf diesem Gebiet arbeiten auf der JKU (Kauers, Paule, Schneider, Koutschan).

8.4 Unlösbarkeitsresultate

Für lineare Differentialgleichungen gibt es die *Picard-Vessiot-Theorie*, die ähnlich funktioniert wie die Galois-Theorie in der Algebra. Für eine gegebene Gleichung kann man im Prinzip entscheiden, ob sich die allgemeine Lösung als intelementare Funktion schreiben läßt; anders ausgedrückt, ob sich die Lösung zurückführen läßt auf Integration, Logarithmus, und Exponentialfunktion. “Im Prinzip” deshalb, weil der Algorithmus für Ordnung größer als 2 ziemlich kompliziert und rechenaufwändig ist; es gibt auch keine vollständige Implementierung.

Auf jeden Fall weiß man von einigen Differentialgleichungen, dass die allgemeine Lösung nicht intelementar ist. Die einfachsten sind die Airy-Differentialgleichung für $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : a''(t) - ta(t) = 0$$

und die Besselsche Differentialgleichung für $b : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : t^2 b''(t) + tb'(t) + (t^2 - \lambda^2)b(t) = 0,$$

wobei λ ein reeller Parameter ist, sodass $\lambda - \frac{1}{2}$ nicht ganzzahlig ist. Falls $\lambda - \frac{1}{2}$ ganzzahlig ist, ist die Lösung sogar elementar.

Für allgemeine (nichtlineare) Differentialgleichungen gibt es keine vergleichbare Theorie; wenn es nicht gelingt, die Gleichung zu lösen oder auf eine lineare Gleichung zurückzuführen, dann hat man keine Möglichkeit, festzustellen, ob die Lösung intelementar ist oder nicht.

9 Lineare Autonome Rekursionen

Hier ist $T = \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, und die Rekursion für $f : T \rightarrow X$ ist $f(t+1) = Af(t)$. Die allgemeine Lösung ist $f(t) = A^t v$ mit einem beliebigen Anfangswert $v = f(0)$. Wir interessieren uns für das Verhalten von f für grosse t .

Was im kontinuierlichen Fall die Equilibrien sind, sind im diskreten Fall die Fixpunkte – im linearen Fall der Nullvektor und die Eigenvektoren zu 1, die zu konstanten Folgen führen. Für andere Eigenwerte bekommen wir Zyklen, d.h., periodische Lösungsfunktionen. Die Definition von Stabilität und asymptotischer Stabilität sind die gleichen wie in Definition 5.2 und in Definition 5.3, man braucht nur das Wort “Equilibrium” durch das Wort “Fixpunkt” ersetzen.

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Ein k -Zyklus der Rekursion oben ist eine Lösung f , die für alle $t \in T$ die Gleichung $f(t+k) = f(t)$ erfüllt. Wir können die Begriffe Stabilität und asymptotische Stabilität auch auf k -Zyklen erweitern. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass die k -Zyklen den Fixpunkten der Rekursion für $g : T \rightarrow X$, $g(t+1) = A^k g(t)$ entsprechen. Ein (asymptotisch) stabiler k -Zyklus entspricht einem (asymptotisch) stabiler Fixpunkt von A^k .

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ein n -Eck ist gegeben durch eine Folge von n Punkten $(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$. Für jedes n -Eck können wir ein zweites n -Eck durch die Vorschrift “ersetze jeden Punkt durch den Mittelpunkt seiner Nachbarpunkte” definieren. Diese Vorschrift definiert eine Abbildung

$$F : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n, (p_1, \dots, p_n) \mapsto \left(\frac{p_n + p_2}{2}, \frac{p_1 + p_3}{2}, \dots, \frac{p_{n-1} + p_1}{2} \right).$$

Die Abbildung ist offensichtlich linear und entspricht einer Blockmatrix aus $n \times n$ Blöcken vom Format 2×2 , und zwar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}I_2 & \dots & \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{2}I_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{2}I_2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Wir iterieren die Abbildung und beobachten, was mit dem n -Eck passiert. Dazu verwenden wir das Programm <http://www.risc.jku.at/jschicho/dg/ngon.py>.

n=3. Eine Iteration liefert ein ähnliches Dreieck mit halber Seitenlänge, das auf den Kopf gestellt ist. Iterieren wir die Abbildung, so werden die Dreiecke immer kleiner und konvergieren gegen den Schwerpunkt.

Die Eigenwerte sind $+1$ mit Vielfachheit 2 und $\frac{-1}{2}$ mit Vielfachheit 4. Der dominierende Eigenwert ist $+1$, drum wird bei fortgesetzter Iteration die Dreiecke auf den Eigenraum zu $+1$ projiziert. Der ist gegeben durch $p_1 = p_2 = p_3$, und die Projektion auf diesen Eigenraum ist das entartete Dreieck, bei dem alle 3 Punkte im Schwerpunkt zusammenfallen. Diese entarteten Dreiecke sind Fixpunkte; sie sind stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Der Eigenraum zu $\frac{-1}{2}$ ist die Menge aller Dreiecke mit Schwerpunkt $(0,0)$. Das ist der Grund für die Beobachtung, dass die Dreiecke bei jedem Schritt auf die Hälfte verkleinert und auf den Kopf gestellt word.

n=4. Die erste Iteration liefert ein entartetes Viereck mit $p_1 = p_3$ und $p_2 = p_4$. Ab der zweiten passiert nichts mehr, scheinbar ist eine konstante Folge erreicht worden. Im Programm wird allerdings nicht gezeigt, dass die Punkte vertauscht werden, das heißt, in Wahrheit haben wir einen 2-Zyklus $(p_1, p_2, p_1, p_2), (p_2, p_1, p_2, p_1)$. Dieser 2-Zyklus ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil. Die Matrix hat die Eigenwerte 1 (Vielfachheit 2), 0 (Vielfachheit 4), und -1 (Vielfachheit 2). Der Eigenraum zum Eigenwert 0 wird nach einer Iteration gleich wegprojiziert. Die Summe der beiden anderen Teilräume ist genau die Menge aller Vierecke mit $p_1 = p_3$ und $p_2 = p_4$. Zweimalige Anwendung der Abbildung, eingeschränkt auf diese Menge, ist die Identität, darum der 2-Zyklus.

n=5. Die Matrix hat wieder den Eigenwert 1 mit Vielfachheit 2 (das gilt übrigens für alle n). Der Eigenraum ist wie beim Dreieck die Menge aller Fünfecke, bei denen alle fünf Punkte zusammenfallen.

Wir beschränken uns auf den Orthogonalraum, also der Menge aller Fünfecke mit Schwerpunkt $(0, 0)$. Es gibt zwei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 := \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \cong 0.3$ und $\lambda_2 := \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \cong -0.8$, beide mit Vielfachheit 4. Der Eigenraum zu λ_1 ist die Menge aller affinen Bilder eines regelmäßigen Fünfecks. Der Eigenraum zu λ_2 ist das affine Bild einer anderen Figur, die man leicht sehen kann, wenn man die Abbildung oft genug iteriert und ab und zu vergrößert: weil dieser Eigenwert betragsmäßig der grössere ist, setzt sich diese Figur immer mehr durch. Weil $\lambda_2 < 0$ ist, wird die Figur bei jeder Iteration auf den Kopf gestellt.

Es ist klar, dass das asymptotische Verhalten von A^t , $t \in \mathbb{N}$, von den Eigenwerten von A abhängt. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass sich A schreiben lässt als $A = BJB^{-1}$, wobei B invertierbar und A eine Jordan-Normalform ist. Für alle t gilt

$$A^t = (BJB^{-1})^t = BJB^{-1}BJB^{-1}BJ \dots JB^{-1} = BJ^tB^{-1},$$

also genügt es, das asymptotische Verhalten von Jordan-Normalformen zu untersuchen. Sieht man sich die Formeln für die Potenzen von Jordan-Blöcken an, so sieht man, dass alle Einträge von der Form $\binom{t}{k}\lambda^{t-k}$ sind (sofern sie nicht Null sind), wobei λ der Eigenwert in der Diagonale des Blocks ist, und k eine natürliche Zahl ist, die kleiner als die Größe des Blocks. Dieser Term konvergiert für $|\lambda| < 1$ gegen 0; für $|\lambda| = 1$ und $k = 0$ ist der Term beschränkt; in allen anderen Fällen ist der Term unbeschränkt.

Für die Potenzen der Matrizen sind daher die folgenden Fälle möglich.

- Alle Eigenwerte haben Betrag kleiner als 1. Dann gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = \mathbf{0}$.
- Alle Eigenwerte haben Betrag kleiner oder gleich 1, und die Jordan-Blöcke, die zu den Eigenwerten mit Betrag 1 gehören, sind 1-Blöcke. Dann ist die Folge der Matrizen $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$ beschränkt.
- In allen anderen Fällen ist die Folge $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt.

Satz 9.1. a) Wenn die Folge $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, dann ist der Nullvektor ein asymptotisch stabiler Fixpunkt.

b) Wenn die Folge $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, dann ist der Nullvektor ein stabiler Fixpunkt.

c) Wenn die Folge $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist, dann ist der Nullvektor nicht stabil.

Beweis. In allen 3 Fällen verwenden wir die Formel $f(t) = A^t v_0$ für die Lösung f der Rekursion $\forall t: f(t+1) = Af(t)$.

b) Wenn die Folge der Matrixpotenzen beschränkt ist, dann ist auch $K := \{A^t v \mid t \in \mathbb{N}, \|v\| < 1\}$ beschränkt. Es sei R eine obere Schranke für den Maximalbetrag von Elementen in K . Multiplikation mit beliebigen Potenzen von Faktoren kann den Betrag eines Vektors höchstens ver- R -fachen. Es sei U eine offene Umgebung von $\mathbf{0}$. Dann suchen wir eine Kugel von Radius $\epsilon > 0$, die in U enthalten ist, und wählen V als Einheitskugel von Radius $\frac{\epsilon}{R}$. Jede Folge mit Startwert in U bleibt dann in V .

a) Wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = \mathbf{0}$ gilt, dann ist $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ unabhängig vom Startwert v_0 . Das zeigt den Zusatz "asymptotisch".

c) Angenommen, der Nullvektor sei stabil. Wir wählen $U := \{v \mid \|v\| < 1\}$. Wegen der Stabilität existiert eine offene Umgebung V von $\mathbf{0}$, sodass Lösungen mit Startwert in V immer in U bleiben. Es sei ϵ der Radius einer Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{0}$, die in V enthalten ist. Dann kann Multiplikation mit beliebigen Matrizen den Betrag eines Vektors höchstens mit dem Faktor $\frac{1}{\epsilon}$ multiplizieren. Daraus folgt, dass die Folge der Potenzen von A beschränkt ist bezüglich der Norm

$$M \mapsto \|M\|_{op} := \sup_{v, \|v\| < 1} \|Mv\|.$$

Daraus folgt, dass f beschränkt ist durch diese Schranke $\frac{1}{\epsilon}$ mal der Norm von v_0 . □

Wir wenden uns dem skalaren Fall höherer Ordnung zu: gegeben sind $k \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Folge $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, die die Rekursion

$$\forall t : f(t+k) + a_{k-1}f(t+k-1) + \dots + a_1f(t+1) + a_0f(t) = 0 \quad (10)$$

erfüllen. Die Funktion ist durch k Anfangswerte $f(0), \dots, f((k-1))$ eindeutig bestimmt. Ein klassisches Beispiel ist die Fibonacci-Rekursion $k=2$, $a_1 = a_0 = -1$. Die Lösung mit Anfangswerten $f(0) = 0, f(1) = 1$ ist die Fibonacci-Folge $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$.

Um das asymptotische Verhalten zu untersuchen (und nebenbei auch eine geschlossene Lösungsformel für die Rekursion zu finden), reduzieren wir auf den vektoriellen Fall erster Ordnung und erhalten die folgende Rekursion für $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\forall t : g(t+1) = Ag(t), A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Die Matrix A ist die Begleitmatrix des Polynoms $X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$. Dieses Polynom heißt auch das "charakteristische Polynom der Rekursion (10)".

Wir werden ein wenig später zeigen, dass das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom der Begleitmatrix mit dem charakteristischen Polynom der Rekursion übereinstimmen. Aus der Gleichheit von Minimalpolynom und charakteristischem Polynom folgt, dass alle Jordan-Blöcke maximale Größe haben, oder equivalent dazu dass alle Eigenräume eindimensional sind.

Um die Jordan-Normalform verwenden zu können, lassen wir auch komplexe Lösungen zu, also Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{C} .

Der Lösungsraum der Rekursion (10) wird von den Einträgen der ersten Zeile in der der matrixwertigen Funktion $t \mapsto A^k$ erzeugt. Diese sind wieder erzeugt von den Einträgen der matrixwertigen Funktion $t \mapsto J^k$, wobei J eine Jordan-Normalform von A ist. Diese Einträge kennen wir bereits: ein Eigenwert $\lambda \neq 0$ von Vielfachheit m führt zu Einträgen $t \mapsto \binom{t}{i} \lambda^{t-i}$, $i = 0, \dots, m-1$. Im Fall $\lambda = 0$ ist λ^{t-i} für $t \leq i$ nicht definiert. Wenn 0 ein m -facher Eigenwert ist, dann nimmt man die Funktionen $\delta_0, \dots, \delta_{m-1}$, wobei $\delta_i(j)$ gleich 1 für $i = j$ und 0 sonst ist. Insgesamt sind das nicht mehr als k Funktionen, also genau die Dimension des erzeugten Vektorraums. Daher sind sie linear unabhängig und bilden eine Basis für den Lösungsraum.

Beispiel 9.2. Das charakteristische Polynom der Fibonacci-Rekursion ist $X^2 - X - 1$, mit den Nullstellen $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$ und $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62$. Die allgemeine Lösung der Rekursion ist

$$f(t) = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^t + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit den Anfangswerten $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$ bekommt man $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Für große t wird der zweite Summand sehr klein. Da die Fibonacci-Zahlen ganzzahlig sind, liegt der erste Summand sehr nahe bei einer ganzen Zahl.

Im obigen Beispiel sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms reell. Wenn die Nullstellen nicht reell sind, dann sind die Basislösungen oben auch nicht reellwertig, sondern komplexwertig. Es tritt aber zu jeder nichtreellen Nullstelle auch die konjugiert komplexe Zahl als Nullstelle mit der gleichen Vielfachheit auf. Damit hat man zu jeder nichtreellwertigen Basislösung g eine konjugiert komplexe Basislösung \bar{g} . Durch komplexe Linearkombination

$$h_1 = \frac{g + \bar{g}}{2}, h_2 = \frac{g - \bar{g}}{2i}$$

kann man zwei reelle Lösungen finden, die den gleichen Vektorraum wie g, \bar{g} erzeugen. Wenn man das für alle nichtreellen Basislösungen macht, kann man dadurch eine Basis von reellwertigen Lösungen erzeugen.

Beispiel 9.3. Die Rekursion für $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : g(t+2) + g(t+1) + g(t) = 0$$

hat das charakteristische Polynom $X^2 + X + 1$ mit den Eigenwerten $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ und $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \cos(2\pi/3) - i\sin(2\pi/3)$. Die komplexwertigen Basislösungen sind

$$f_1(t) = (\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3))^t = \cos(2t\pi/3) + i\sin(2t\pi/3),$$

$$f_2(t) = (\cos(2\pi/3) - i\sin(2\pi/3))^t = \cos(2t\pi/3) - i\sin(2t\pi/3).$$

(Hier haben wir die Formeln von De Moivre für die Potenzen von komplexen Zahlen verwendet.) Als reelle Basisfunktionen findet man daher $f_3(t) = \cos(2t\pi/3)$ und $f_4(t) = \sin(2t\pi/3)$. Die allgemeine reellwertige Lösung ist daher

$$f(t) = c_1 \cos(2t\pi/3) + c_2 \sin(2t\pi/3).$$

Beim asymptotischen Verhalten von Folgen, die durch lineare autonome Rekursionen definiert werden, können wir folgende Möglichkeiten feststellen.

- Wenn alle Eigenwerte Betrag kleiner als 1 haben, dann konvergiert jede Lösungsfolge gegen 0, und 0 ist ein asymptotisch stabiler Fixpunkt.
- Wenn alle Eigenwerte Betrag kleiner gleich 1 haben und wenn alle Eigenwerte mit Betrag 1 einfach sind, dann ist jede Lösung beschränkt. 0 ist ein stabiler Fixpunkt.
- Wenn ein Eigenwert Betrag grösser als 1 hat oder wenn ein Eigenwert mit Betrag 1 und Vielfachheit größer als 1 existiert, dann gibt es unbeschränkte Lösungen. 0 ist instabiler Fixpunkt. Die Lösungen wachsen aber höchstens exponential, d.h., es existieren Konstanten $C, Q \in \mathbb{R}$, sodass $\forall t : f(t) < CQ^t$ gilt.

Zum Beweis reduziert man auf den vektorwertigen Fall erster Ordnung und verwendet Satz (9.1) sowie die Tatsache, dass die Größe der Jordan-Blöcke von Begleitmatrizen gleich der Vielfachheit des zugehörigen Eigenwerts ist.

Erwähnt sei noch eine Deutung des charakteristischen Polynoms, die wir im nächsten Kapitel brauchen werden. Es sei \mathcal{F} die Menge aller Funktionen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (bzw. aller Folgen in \mathbb{R}), die höchstens exponentiell wachsen. Diese Menge bildet mit gliedweiser Addition und Skalarmultiplikation einen \mathbb{R} -Vektorraum. Die Funktion

$$S : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, f \mapsto (t \mapsto f(t+1))$$

heißt Shift-Operator: sie schmeißt das erste Folgenglied weg, und alle anderen rücken um 1 nach. Sei nun $P \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad k , $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{k-1}X^{k-1} + X^k$. Wir definieren den linearen Operator

$$P(S) : S : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, f \mapsto a_0f + a_1S(f) + \dots + a_{k-1}S^{k-1}(f) + S^k(f).$$

Die linke Seite der Rekursion (10) ist gleich dem t -ten Glied der Folge $P(S)(f)$, und $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann eine Lösung wenn sie im Kern von $P(S)$ ist. Das charakteristische Polynom einer Rekursion liefert also genau jenes Polynom, in das man den Shift-Operator einsetzen muss, um die linke Seite der Rekursionsgleichung zu erhalten.

Satz 9.4. *Das charakteristische Polynom der Rekursion (10) ist gleichzeitig das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom der Matrix A in der Rekursion (11).*

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{F}$. Wir definieren die Prolongation $\rho(f)$ als das k -Tupel $(f, S(f), S^2(f), \dots, S^{k-1}(f)) \in \mathcal{F}^k$. Die Matrix A erfüllt die Gleichung $A \cdot \rho(f) = S(f)$ genau dann, wenn f eine Lösung der Rekursion (10) ist (wir haben die Matrix gerade so definiert, sodass diese beiden Rekursionen äquivalent sind).

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ das Minimalpolynom der Matrix A . Dann gilt für jede Lösung f der Rekursion

$$\mathbf{0} = P(A) \cdot \rho(f) = P(S)(\rho(f)).$$

Wenn wir von dieser vektoriellen Gleichung nur den ersten Eintrag nehmen, erhalten wir $Q(S)(f) = 0$. Mit anderen Worten: die Lösungen der Rekursion (10) erfüllen alle die Rekursion, deren charakteristisches Polynom gleich P ist. Der Menge aller Lösungen von (10) ist aber ein Vektorraum der Dimension k und kann daher keine Rekursion von kleinerer Ordnung erfüllen. Die Rekursion der Ordnung k ist ausserdem eindeutig, und es folgt, dass P das charakteristische Polynom der Rekursion ist.

Weil die Matrix A eine $k \times k$ -Matrix ist, und das Minimalpolynom P Grad k hat, ist P auch das charakteristische Polynom der Matrix A . \square

10 Lineare Autonome Differentialgleichungen

Zur Abwechslung beginnen wir mit dem skalaren Fall höherer Ordnung. Gegeben sind $k \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. Gesucht ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\forall t : f^{(k)}(t) + a_{k-1}f^{(k-1)}(t) + \dots + a_1f'(t) + a_0f(t) = 0 \quad (12)$$

gilt. Beim Anfangswertproblem (AWP) gegeben wir noch zusätzlich numerische Werte von $f(0)$, $f'(0)$, \dots , $f^{(k-1)}(0)$ vor. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (12) ist das Polynom $X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_1X + a_0$.

Beispiel 10.1. Es sei $a \geq 0$ und $b > 0$. Die Gleichung für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$$

heißt *Schwingungsgleichung*. Sie beschreibt die Schwingung eines Federpendels oder die Dynamik eines elektrischen Schwingkreises bestehend aus einem Kondensator, einer Spule und einem Widerstand.

Das charakteristische Polynom ist $X^2 + aX + b$.

Ähnlich wie im diskreten Fall definieren wir die Menge \mathcal{D} aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} , der bezüglich punktwiser Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum ist. Der Operator $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ist definiert als die Ableitung. Wie im diskreten Fall können wir dann die Differentialgleichung auch schreiben als

$$P(D)(f) = 0,$$

wobei die Null auf der rechten Seite die Nullfunktion ist und P das charakteristische Polynom ist. Mit der Methode des Potenzreihenansatzes werden wir eine Lösung des AWP konstruieren und zeigen, dass es keine andere Lösung geben kann, die an der Stelle 0 *analytisch* ist. Eine Funktion heißt an einer Stelle analytisch, wenn sie dort beliebig oft differenzierbar ist, wenn der Konvergenzradius der Taylorreihe positiv ist, und wenn die Funktion innerhalb des Konvergenzintervalls mit der Taylorreihe übereinstimmt.

Wenn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist, die an der Stelle 0 analytisch ist, wollen wir mit $\text{tay}(f)$ die Folge $(f^r)_{r \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen bei 0 bezeichnen. Man kann zeigen, dass $\text{tay}(f)$ in \mathcal{F} ist (Übung). Wenn umgekehrt $c = (c_r)_{r \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{F} ist, dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{r=0}^{\infty} c_r \frac{t^r}{r!}$ gleich $+\infty$. Wir wollen die Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} , die durch diese überall konvergente Potenzreihe definiert ist, mit $\text{pow}(c)$ bezeichnen.

Nach dem Satz von Taylor sind die Funktionen $\text{tay} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$ und $\text{pow} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}$ invers zueinander, wenn wir sie geeignet einschränken: $\tau \circ \text{pow} = \text{id}_{\mathcal{D}}$ ohne Einschränkung, und wenn $f \in \mathcal{D}$ analytisch bei 0 ist, gilt $\text{pow}(\text{tay}(f)) = f$.

Satz 10.2. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $P \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad k . Dann ist der Kern von $P(D)$ – also die Menge der Lösungen der Differentialgleichung, deren charakteristisches Polynom gleich P ist – gleich dem pow-Bild des Kerns von $P(S)$ – also der Menge der Lösungen der Rekursion, deren charakteristisches Polynom gleich P ist.*

Beweis. Weil man Potenzreihen innerhalb des Konvergenzbereichs gliedweise differenzieren kann, ist $\text{pow} \circ S = D \circ \text{pow}$. Durch Induktion nach r zeigt man

$$\text{pow} \circ S^r = \text{pow} \circ S^{r-1} \circ S = D^{r-1} \circ \text{pow} \circ S = D^{r-1} \circ D \circ \text{pow} = D^r \circ \text{pow},$$

und wegen der Linearität von pow gilt daher $\text{pow} \circ P(S) = P(D) \circ \text{pow}$. Sei $f \in \mathcal{D}$ analytisch. Dann ist f genau dann in $\ker(P(D))$, wenn $\text{tay}(f)$ im Kern von $\text{pow} \circ P(S) = P(D) \circ \text{pow}$ ist; da der Kern von pow Null ist, genau dann wenn $\text{tay}(f)$ in $\ker(P(S))$ ist. \square

Wir berechnen die Potenzreihen von den Basislösungen:

$$\lambda \neq 0: \text{pow} \left(\binom{m}{i} \lambda^{m-i} t^m \right) (t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\binom{m}{i} \lambda^{m-i} t^m}{m} = \frac{t^i e^{\lambda t}}{i}$$

$$\lambda = 0: \text{pow}(\delta_i)(t) = t^i$$

Den konstanten Faktor $\frac{1}{i}$ werden wir natürlich weglassen. Dann kriegen wir als Basislösungen für eine Nullstelle mit Vielfachheit r die Basislösungen

$$t \mapsto e^{\lambda t}, t \mapsto t e^{\lambda t}, \dots, t \mapsto t^{r-1} e^{\lambda t}$$

unabhängig davon, ob λ Null ist oder nicht. Wenn λ nicht reell, also $\lambda = a + bi$ mit $b \neq 0$, dann ersetzen wir die komplexen Basislösungen

$$t \mapsto t^r e^{(a+bi)t}, t \mapsto t^r e^{(a-bi)t}$$

durch die reellen Lösungen

$$t \mapsto t^r \frac{e^{(a+bi)t} + e^{(a-bi)t}}{2} = t^r e^{at} \cos(bt), t \mapsto t^r \frac{e^{(a+bi)t} - e^{(a-bi)t}}{2i} = t^r e^{at} \sin(bt).$$

Mit diesen Basislösungen können wir das Stabilitätsverhalten des Equilibriums beim Nullvektor analysieren.

Satz 10.3. *Wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms Realteil kleiner als 0 haben, dann ist 0 ein asymptotisch stabiles Equilibrium.*

Wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms Realteil kleiner gleich 0 haben und die Nullstellen mit Realteil Null einfach sind, dann ist 0 ein stabiles Equilibrium.

In allen anderen Fällen ist 0 ein instabiles Equilibrium.

Proof. Beweis Für die Basislösungen gilt: die Funktion $t \mapsto t^r e^{\lambda t}$ ist für $|\lambda| > 1$ und für ($|\lambda| = 1$ und $r \geq 1$) unbeschränkt, für $|\lambda| = 1$ und $r = 0$ beschränkt, und für $|\lambda| < 1$ konvergent mit Grenzwert 0. Daraus folgt die Behauptung ähnlich wie im diskreten Fall. \square

10.1 Eine Alternative zu VdK

Es sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein normiertes Polynom vom Grad k . Bei der linearen inhomogenen Differentialgleichung für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t: P(D)(f)(t) = b(t), \tag{13}$$

– wobei b eine gegebene stetige Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ist –, kennen wir eine Basis des Lösungsraums. Mit TdV könnte man die Gleichung lösen. Das kostet die Lösung eines $k \times k$ Gleichungssystems mit Funktionen-Koeffizienten und k Integrale.

Wenn die rechte Seite b selbst eine Lösung einer linearen autonomen Differentialgleichung ist, zum Beispiel $Q(D)(b) = 0$ für ein Polynom $Q \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad $l \in \mathbb{N}$, dann geht es auch schneller. Dazu wenden wir den Operator $Q(D)$ auf beide Seiten von (13) an und erhalten eine homogene autonome Gleichung der Ordnung $k + l$:

$$Q(D)P(D)(f) = (QP)(D) = \mathbf{0}.$$

(Das Einsetzen von D in ein Polynom ist ein Ringhomomorphismus.) Wir schreiben unsere Basis für den Kern von $(QP)(D)$ hin. Die $k + l$ Basisfunktionen sind günstigerweise so gewählt, dass die k Basisfunktionen von $P(D)$ alle enthalten sind. Diese streichen wir aus und setzen eine allgemeine Linearkombination der l übrigen in die Gleichung (13) ein. Durch Koeffizientenvergleich bekommen wir ein Gleichungssystem. Wir lösen es und haben eine spezielle Lösung von (13). Um die allgemeine Lösung zu erhalten, addieren wir noch eine allgemeine Lösung des homogenen Gleichungssystems. Kostenfaktor: Ableitungen, Koeffizientenvergleich, und Lösung eines $l \times l$ -Gleichungssystems mit konstanten Koeffizienten.

Wenn die charakteristischen Polynome von P und Q teilerfremd sind, dann kann man sogar noch die Lösung des linearen Gleichungssystems einsparen und statt dessen einen erweiterten Euklidischen Algorithmus für P und Q durchführen. Dieser liefert Polynome $A, B \in \mathbb{R}[X]$ von Grad $\deg(A) = l$ und $\deg(B) = k$, sodass $AP + BQ = 1$ ist. Die Lösung von (13) ist dann einfach $A(D)(b)$. Hier ist der Beweis:

$$P(D)A(D)(b) = (PA)(D)(b) = (1 - BQ)(D)(b) = b - (BQ)(D)(b) = b - B(D)Q(D)(b) = b.$$

Man beachte, dass der lineare Operator $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, der dem konstanten Polynom 1 entspricht, der Identitätsoperator ist.

10.2 Die Exponentialmatrix

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bei der Differentialgleichung für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\forall t : f'(t) = Af(t)$$

führt der Potenzreihenansatz zur Folge der Ableitungen $f^{(k)}(0) = A^k f(0)$ und damit zur analytischen Lösung

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r t^r}{r!} f(0).$$

Die matrixwertige Funktion $t \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r t^r}{r!}$, die zu jedem Anfangswert die Auswertung der Lösung an der Stelle t liefert, heißt *Exponentialfunktion* der Matrix A ; der Funktionswert wird notiert mit e^{At} oder $\exp(At)$. Die folgenden Gesetze gelten für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $s, t \in \mathbb{R}$:

1. $\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At}A$.
2. $e^{As}e^{At} = e^{A(s+t)}$.
3. Wenn $AB = BA$, dann ist $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$.
4. Wenn B invertierbar ist, dann ist $e^{BAB^{-1}t} = Be^{At}B^{-1}$.

Die letzte Identität können wir verwenden, um die Exponentialmatrix mit der Darstellung in

Jordan-Normalform zu berechnen. Für Jordan Blockmatrizen $J_r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}$

haben wir die Exponentialmatrix

$$e^{J_r t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!}e^{\lambda t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Exponentialfunktion von Jordan-Normalformen hat man damit eine Formel (blockweise Anwendung der Formel oben). Für beliebige Matrizen $A = BJB^{-1}$ erhalten wir $e^{At} = Be^{Jt}B^{-1}$.

Für das asymptotische Verhalten spielt die Exponentialfunktion eine ähnliche Rolle wie die Folge der Matrixpotenzen im diskreten Fall. Die entscheidende Eigenschaft für die Eigenwerte ist aber nicht, ob der Betrag kleiner als 1 ist, sondern ob der Realteil kleiner als Null ist – genau dann konvergiert die Exponentialfunktion $t \mapsto e^{\lambda t}$ gegen Null.

Satz 10.4. *Wenn alle Eigenwerte von λ negativen Realteil haben, dann ist der Nullvektor ein asymptotisch stabiles Equilibrium.*

Wenn alle Eigenwerte von λ nichtpositiven Realteil haben und wenn die Jordan-Blöcke zu Eigenwerten mit Realteil Null alle 1×1 -Blöcke sind, dann ist der Nullvektor ein stabiles Equilibrium.

In allen anderen Fällen ist der Nullvektor ein instabiles Equilibrium.

Der Beweis ist ähnlich wie im diskreten Fall.

11 Der Fundamentalsatz der Algebra

Wir werden später beliebige (nichtlineare) Differentialgleichungen für $f : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$

$$\forall t : f'(t) = F(f(t))$$

qualitativ beschreiben, wobei $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion ist. Die Equilibrien sind die Nullstellen von F . In der Nähe der Equilibrien kann man F durch seine Ableitung approximieren. Ersetzt man F in der Differentialgleichung durch diese Approximation, dann erhält man die linearisierte Differentialgleichung für $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\forall t : g'(t) = Ag(t), \quad A = \frac{\partial F}{\partial x}(\mathbf{0}).$$

Man hätte gerne, dass die Lösungen der Linearisierungen nahe bei Lösungen der Ausgangsgleichung sind und sich asymptotisch gleich verhalten. Das ist nicht immer der Fall, und wir werden später genaue Bedingungen dafür angeben.

Als Vorbereitung für diese spätere Untersuchung ist es notwendig, zu bestimmen, wie sich das Stabilitätsverhalten ändert, wenn die Matrix A geringfügig gestört wird. Das Stabilitätsverhalten wird von den Nullstellen des charakteristischen Polynomes bestimmt (und von der Größe der Jordan-Blöcke). Wir würden deshalb gerne ein Resultat verwenden, das besagt, dass die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängen. Das kann natürlich nur für den komplexen Fall stimmen: im reellen Fall macht selbst die Anzahl der Nullstellen Sprünge. Aber auch im komplexen Fall gibt es Schwierigkeiten: es lässt sich keine stetige Funktion finden, die jedem Polynom stetig einen Vektor von Nullstellen zuordnet; nicht einmal für Grad 2, wo es sogar eine Lösungsformel gibt. Das Problem ist die Mehrdeutigkeit der Wurzeloperation im komplexen. Zunächst soll sichergestellt werden, dass die Anzahl der Nullstellen, mit Vielfachheit gezählt, gleich dem Grad des Polynoms ist. Das ist der Fundamentalsatz der ALgebra. Wir benötigen ein Lemma, das die Nullstellen eines Polynoms beschränkt.

Lemma 11.1. *Es sei $p := X^d + b_1X^{d-1} + \dots + b_d$ ein Polynom von Grad d , $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{C}$. Es sei $e > 0$. Es sei $M \in (0, \infty)$ eine reelle Zahl, sodass $|b_i| < \frac{M^i}{d+1}$ für $i = 1, \dots, d$ und $e < \frac{M^d}{d+1}$ gilt. Dann gilt für jedes z mit $|z| > M$ die Ungleichung $|p(z)| > e$. Insbesondere hat p keine Nullstelle mit Betrag größer als d .*

Proof. Es sei $|z| > M$. Dann gelten für $i = 1, \dots, d$ die Ungleichung $|b_i z^{d-i}| < \frac{|z^d|}{d+1}$ und obendrein $e < \frac{|z^d|}{d+1}$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|p(z)| = |z^d + \sum_{i=1}^d b_i z^{d-i}| > |z^d| - \sum_{i=1}^d |b_i z^{d-i}| > |z^d| - d \frac{|z^d|}{d+1} = \frac{|z^d|}{d+1} > e.$$

□

Satz 11.2 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes normierte Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$ von Grad d lässt sich schreiben als Produkt von d Linearfaktoren*

$$p = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_d)$$

mit $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass p eine Nullstelle hat. Wenn a eine Nullstelle ist, dann ist $(z - a)$ ein Faktor, und der Quotient ist von kleinerem Grad. Mit Induktion kann man die Behauptung zeigen.

Wir nehmen indirekt an, dass p keine Nullstellen hat. Die Menge $\{z \mid p(z) \leq p(0)\}$ ist abgeschlossen wegen Lemma 11.1 beschränkt, also kompakt. Also nimmt die Funktion $z \mapsto |p(z)|$ auf dieser Menge ein Minimum an, und dieses Minimum ist auch das globale Minimum der Funktion $z \mapsto |p(z)|$ auf ganz \mathbb{C} . Es sei z_0 eine Minimalstelle. Die Taylorentwicklung von p um z_0 sei

$$p(z_0 + w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \cdots + b_d w^d.$$

Es gilt $b_0 \neq 0$, sonst wäre z_0 eine Nullstelle, und $b_d = 1$. Es sei k der kleinste positive Index mit $b_k \neq 0$. Wir wählen nun $s > 0$, sodass die Ungleichungen $|b_i|s^i < \frac{|b_k|s^k}{d+1}$ für $i = k+1, \dots, d$ und $|b_k|s^k < |b_0|$ erfüllt sind. Als nächstes wählen wir $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = s$, sodass $\frac{b_k w^k}{b_0}$ reell und negativ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} |p(z_0 + w)| &\leq |b_0 + b_k w^k| + \sum_{i=k+1}^d |b_i w^i| = |b_0| - |b_k|s^k + \sum_{i=k+1}^d |b_i|s^i \leq \\ &\leq |b_0| - |b_k|s^k + (d-k) \frac{|b_k|s^k}{d+1} = |b_0| - \frac{(k+1)|b_k|s^k}{d+1} < |b_0| = |p(z_0)|, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Wir brauchen noch eine Art Stetigkeits-Aussage für die Abhängigkeit der Nullstellen vom Polynom. Dazu definieren wir für fixed $d \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion z_d von \mathbb{C}^d in die Menge P_d aller normierten Polynome vom Grad d wie folgt.

$$(a_1, \dots, a_d) \mapsto (X - a_1) \cdots (X - a_d).$$

Das Polynom $z_d(a_1, \dots, a_d)$ ist also das Polynom, das als a_1, \dots, a_d als Nullstellen hat, mit der richtigen Vielfachheit.

Lemma 11.3. *Die Abbildung z_d ist offen: das Bild jeder offenen Menge ist offen.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{C}^d$ offen. Es sei V die Menge aller Permutationen von Elementen in U . Es sei $p : \mathbb{N} \rightarrow (P_d \setminus z_d(V))$ eine Folge im Komplement von $z_d(V)$, die in P_d konvergent ist. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist z_d surjektiv. Es sei $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^d$ eine Folge von Urbildern: für jedes $i \in \mathbb{N}$ wählen wir $n(i) \in z_d^{-1}(p(i))$. Da p eine konvergente Folge ist, ist p beschränkt. Aus Lemma 11.1 folgt, daß n beschränkt ist. Daher besitzt n eine konvergente Teilfolge $n' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^d$. Es sei $p' : \mathbb{N} \rightarrow P_d$ die entsprechende Teilfolge von p (d.h. $p'(i) = z_d(n'(i))$ für alle i). Die Menge V ist offen als Vereinigung (endlich vieler) offener Mengen. Das Komplement von V ist daher abgeschlossen. Also ist $\lim_{i \rightarrow \infty} n'(i)$ im Komplement von V . Es folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p(i) = \lim_{i \rightarrow \infty} p'(i) = \lim_{i \rightarrow \infty} z_d(n'(i)) = z_d(\lim_{i \rightarrow \infty} n'(i)) \in z_d(\mathbb{C}^d \setminus V) = P^d \setminus z_d(V).$$

Also ist $P^d \setminus z_d(V)$ abgeschlossen und daher ist $z_d(U) = z_d(V)$ offen. □

Lemma 11.3 ist eine mathematisch präzise Formulierung dessen, was wir uns vorher als “eine Art Stetigkeits-Aussage” gewünscht haben. Es erlaubt uns, zu sagen, dass die Menge aller Polynome mit Nullstellen in einer festgelegten offenen Teilmenge von \mathbb{C} – zum Beispiel der Menge der Zahlen

mit negativem Realteil – eine offene Menge ist. Wenn man ein Polynom p in dieser Menge hat, dann gibt es ein $\epsilon > 0$, sodass jedes Polynom in einer ϵ -Umgebung von p_0 wieder Nullstellen in der festgelegten offenen Teilmenge hat.

Wir wollen das Lemma nun anwenden auf charakteristische Polynome von Matrizen.

Satz 11.4. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a + b = n$. Die Menge $\mathcal{H}_{a,b} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ aller Matrizen, die a Eigenwerte mit negativem Realteil und b Eigenwerte mit positivem Realteil haben, wobei die Eigenwerte mit (algebraischer) Vielfachheit gezählt werden, ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{n \times n}$.*

Beweis. Es sei A die Menge aller komplexen Zahlen mit negativem Realteil und B die Menge aller reellen Zahlen mit positivem Realteil. Die Menge $A^a \times B^b$ ist offen in \mathbb{C}^n . Nach Lemma 11.3 ist $z_n(A^a \times B^b)$ offen in P_d . Die Teilmenge $P_{a,b}$ der reellen Polynome in $z_n(A^a \times B^b)$ ist dann auch offen in \mathbb{R}^n . Die Abbildung, die jeder Matrix ihr charakteristisches Polynom zuordnet, ist stetig. Und $\mathcal{H}_{a,b}$ ist das Urbild von $P_{a,b}$ unter dieser Abbildung, also ebenfalls offen. \square

Wenn wir also eine lineare Differentialgleichung mit einer Matrix $A \in \mathcal{H}_{a,b}$ haben, dann können wir die eine ϵ -Umgebung von A finden, die immer noch in $\mathcal{H}_{a,b}$ enthalten ist. Wenn A geringfügig gestört wird, genauer gesagt, die Störung $\|A_1 - A\|$ ist kleiner als ϵ , dann haben A_1 und A die gleiche Anzahl von Eigenwerten mit negativem Realteil, und beide Matrizen haben keine Eigenwerte mit Realteil gleich Null. Es folgt, dass der Nullpunkt genau dann stabil für A ist (und wenn ja, dann immer auch asymptotisch stabil), wenn er stabil für A_1 ist. Das Stabilitätsverhalten bleibt also unter kleinen Störungen der Matrix erhalten.

Die Anzahl der Nullstellen mit positivem bzw. negativem Realteil (also a und b im Satz 11.4) bleibt ebenfalls erhalten unter kleinen Störungen (unter der Voraussetzung $a + b = n$). Im Fall $n = 1$ nennen wir den Nullpunkt eine Senke für $(a, b) = (2, 0)$, eine Quelle für $(a, b) = (0, 2)$, und einen Sattelpunkt für $(a, b) = (1, 1)$. Im höherdimensionalen Fall geben die Werte von a und b nicht eine feinere Unterscheidung von Sattelpunkten.