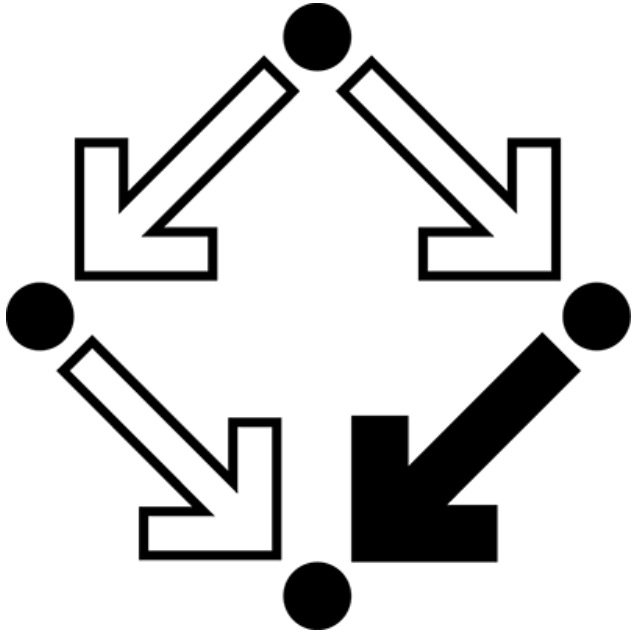
Ausblick Differentialgeometrie



JOHANNES KEPLER
UNIVERSITY LINZ

Gew. Diff.-Gl. und Dyn. Syst., WS 21/22

January 25, 2022

Nochmals Gradientenfelder

Gestern hab ich vorgeschlagen, einen "Gradientenfeld" einer Koordinatentransformation zu unterziehen. Wir führen diese Rechnung nun durch im Spezialfall eines linearen Vektorfelds $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto A\binom{x}{y}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Nochmals Gradientenfelder

Gestern hab ich vorgeschlagen, einen "Gradientenfeld" einer Koordinatentransformation zu unterziehen. Wir führen diese Rechnung nun durch im Spezialfall eines linearen Vektorfelds $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto A\binom{x}{y}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir setzen $\binom{x}{y} = T\binom{u}{v}$ mit $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und transformieren die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'$$

Nochmals Gradientenfelder

Gestern hab ich vorgeschlagen, einen "Gradientenfeld" einer Koordinatentransformation zu unterziehen. Wir führen diese Rechnung nun durch im Spezialfall eines linearen Vektorfelds $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto A\binom{x}{y}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir setzen $\binom{x}{y} = T\binom{u}{v}$ mit $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und transformieren die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \left(T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)'$$

Nochmals Gradientenfelder

Gestern hab ich vorgeschlagen, einen "Gradientenfeld" einer Koordinatentransformation zu unterziehen. Wir führen diese Rechnung nun durch im Spezialfall eines linearen Vektorfelds $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto A\binom{x}{y}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir setzen $\binom{x}{y} = T\binom{u}{v}$ mit $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und transformieren die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \left(T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)' = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}'$$

Nochmals Gradientenfelder

Gestern hab ich vorgeschlagen, einen "Gradientenfeld" einer Koordinatentransformation zu unterziehen. Wir führen diese Rechnung nun durch im Spezialfall eines linearen Vektorfelds $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto A\binom{x}{y}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir setzen $\binom{x}{y} = T\binom{u}{v}$ mit $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und transformieren die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \left(T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)' = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = T^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nochmals Gradientenfelder

Gestern hab ich vorgeschlagen, einen "Gradientenfeld" einer Koordinatentransformation zu unterziehen. Wir führen diese Rechnung nun durch im Spezialfall eines linearen Vektorfelds $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\binom{x}{y} \mapsto A\binom{x}{y}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Wir setzen $\binom{x}{y} = T\binom{u}{v}$ mit $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar und transformieren die Differentialgleichung:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \left(T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)' = T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = T^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1}AT\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Das transformierte Vektorfeld ist also $G : \binom{u}{v} \mapsto T^{-1}AT\binom{u}{v}$.

Immer noch Gradientenfelder

Der Gradient der Funktion $f : \binom{x}{y} \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2ax + by \\ bx + 2cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Immer noch Gradientenfelder

Der Gradient der Funktion $f : \binom{x}{y} \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2ax + by \\ bx + 2cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Daraus sieht man, dass ein lineares Vektorfeld $x \mapsto Ax$ genau dann ein Gradientenfeld ist, wenn die Matrix A symmetrisch ist.

Immer noch Gradientenfelder

Der Gradient der Funktion $f : \binom{x}{y} \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2ax + by \\ bx + 2cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Daraus sieht man, dass ein lineares Vektorfeld $x \mapsto Ax$ genau dann ein Gradientenfeld ist, wenn die Matrix A symmetrisch ist.

Aber wenn A symmetrisch ist, ist im allgemeinen $T^{-1}AT$ nicht mehr symmetrisch!

Jetzt als Differentialform

Wir transformieren nun die lineare Differentialform

$$\mu_{xy} = \left\langle A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = (a_{11}x + a_{12}y)dx + (a_{21}x + a_{22}y)dy$$

mit der gleichen Transformation $\binom{x}{y} = T\binom{u}{v}$:

Jetzt als Differentialform

Wir transformieren nun die lineare Differentialform

$$\mu_{xy} = \left\langle A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = (a_{11}x + a_{12}y)dx + (a_{21}x + a_{22}y)dy$$

mit der gleichen Transformation $\binom{x}{y} = T\binom{u}{v}$:

$$\mu_{uv} = \left\langle AT\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \right\rangle$$

Jetzt als Differentialform

Wir transformieren nun die lineare Differentialform

$$\mu_{xy} = \left\langle A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = (a_{11}x + a_{12}y)dx + (a_{21}x + a_{22}y)dy$$

mit der gleichen Transformation $\binom{x}{y} = T\binom{u}{v}$:

$$\mu_{uv} = \left\langle AT\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle T^t AT\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Die Matrix der transformierten Differentialform ist also $T^t AT$.

Jetzt als Differentialform

Wir transformieren nun die lineare Differentialform

$$\mu_{xy} = \left\langle A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right\rangle = (a_{11}x + a_{12}y)dx + (a_{21}x + a_{22}y)dy$$

mit der gleichen Transformation $\binom{x}{y} = T\binom{u}{v}$:

$$\mu_{uv} = \left\langle AT\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle T^t AT\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Die Matrix der transformierten Differentialform ist also $T^t AT$.

Wenn A symmetrisch ist, dann ist auch $T^t AT$ symmetrisch!

Die Riemann-Metrik

Es sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Die Riemann-Metrik

Es sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das Tangentenbündel bezeichnen wir mit TX, und das Urbild von x unter $\pi : TX \to X$ mit T_xX (Tangentialraum bei x). Zur Erinnerung: T_xX ist ein n-dimensionaler Vektorraum.

Die Riemann-Metrik

Es sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das Tangentenbündel bezeichnen wir mit TX, und das Urbild von x unter $\pi : TX \to X$ mit T_xX (Tangentialraum bei x). Zur Erinnerung: T_xX ist ein n-dimensionaler Vektorraum.
Eine Riemann-Metrik ist eine Funktion g, die jedem $x \in X$ ein positiv definites Skalarprodukt auf T_xX zuordnet; und das differenzierbar, d.h., auf einer Karte ist das Skalarprodukt durch eine positiv definite Matrix gegeben, deren Einträge differenzierbar von x abhängen.

Die Riemann-Metrik

Es sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das Tangentenbündel bezeichnen wir mit TX, und das Urbild von x unter $\pi : TX \to X$ mit T_xX (Tangentialraum bei x). Zur Erinnerung: T_xX ist ein n-dimensionaler Vektorraum.
Eine Riemann-Metrik ist eine Funktion g, die jedem $x \in X$ ein positiv definites Skalarprodukt auf T_xX zuordnet; und das differenzierbar, d.h., auf einer Karte ist das Skalarprodukt durch eine positiv definite Matrix gegeben, deren Einträge differenzierbar von x abhängen.
Damit macht der Begriff des Schnittwinkels zwischen zwei Kurven Sinn: die Ableitung einer Kurve bei einem Punkt x auf der Kurve ist ein Tangentialvektor in T_xX, und zwei solcher Vektoren haben einen Winkel, der mit dem Skalarprodukt berechnet werden kann.

Die Länge einer Kurve

Es sei $C : [0,1] \to X$ eine differenzierbare Kurve auf X. Für alle $t \in [0,1]$ ist $g_x(C'(t), C'(t)) \geq 0$.

Die Länge einer Kurve

Es sei $C : [0,1] \to X$ eine differenzierbare Kurve auf X. Für alle $t \in [0,1]$ ist $g_x(C'(t), C'(t)) \geq 0$. Wir definieren die *Länge* der Kurve als

$$\ell(C) = \int_0^1 \sqrt{g_x(C'(t), C'(t))}dt.$$

Die Länge einer Kurve

Es sei $C : [0,1] \to X$ eine differenzierbare Kurve auf X. Für alle $t \in [0,1]$ ist $g_x(C'(t), C'(t)) \geq 0$. Wir definieren die *Länge* der Kurve als

$$\ell(C) = \int_0^1 \sqrt{g_x(C'(t), C'(t))}dt.$$

Für x, y definieren wir nun den Abstand zwischen zwei Punkten als das Infimum der Längen aller stückweise differenzierbaren Kurven, die x und y verbinden. Die Abstandsfunktion macht X zu einem metrischen Raum.

Die Länge einer Kurve

Es sei $C : [0,1] \to X$ eine differenzierbare Kurve auf X. Für alle $t \in [0,1]$ ist $g_x(C'(t), C'(t)) \geq 0$. Wir definieren die *Länge* der Kurve als

$$\ell(C) = \int_0^1 \sqrt{g_x(C'(t), C'(t))}dt.$$

Für x, y definieren wir nun den Abstand zwischen zwei Punkten als das Infimum der Längen aller stückweise differenzierbaren Kurven, die x und y verbinden. Die Abstandsfunktion macht X zu einem metrischen Raum.

Wenn x, y genügend nahe sind, dann existiert eine eindeutige Kurve von x nach y mit minimaler Länge. Eine Kurve heißt *Geodäte*, wenn sie für zwei Punkte, die nahe genug sind, die kürzeste Verbindung als Teilkurve enthält.

Die Geodäten sind Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zu jedem vorgegebenen Punkt und vorgegebene Tangente gibt es lokal eine eindeutige Geodäte.

Beispiele

Der einfachste Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemann-Metrik, ist der euklidische Raum: nur eine Karte, das Skalarprodukt ist konstant das innere Produkt. Die Geodäten sind die Geraden.

Beispiele

Der einfachste Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemann-Metrik, ist der euklidische Raum: nur eine Karte, das Skalarprodukt ist konstant das innere Produkt. Die Geodäten sind die Geraden.

Es sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und Z eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit. Dann sind die Tangentialräume von Z Teilräume von Tangentialräumen in X, und man kann eine Riemann-Metrik durch Einschränkung definieren.

Beispiele

Der einfachste Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemann-Metrik, ist der euklidische Raum: nur eine Karte, das Skalarprodukt ist konstant das innere Produkt. Die Geodäten sind die Geraden.

Es sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und Z eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit. Dann sind die Tangentialräume von Z Teilräume von Tangentialräumen in X, und man kann eine Riemann-Metrik durch Einschränkung definieren. Insbesondere kann man dadurch jeder m-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine Riemann-Metrik geben.

Beispiele

Der einfachste Riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Riemann-Metrik, ist der euklidische Raum: nur eine Karte, das Skalarprodukt ist konstant das innere Produkt. Die Geodäten sind die Geraden.

Es sei X eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und Z eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit. Dann sind die Tangentialräume von Z Teilräume von Tangentialräumen in X, und man kann eine Riemann-Metrik durch Einschränkung definieren. Insbesondere kann man dadurch jeder m-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ eine Riemann-Metrik geben.

Auf diese Weise kriegt man eine Riemann-Metrik auf der Kugel $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Die Geodäten sind Großkreise.

Das Ellipsoid

Auch beim Ellipsoid sind die Geodäten für ganz $\mathbb{R}$ definiert. Es gibt geschlossene Geodäten (wie auf der Kugel), aber auch Geodäten, die sich selbst immer wieder kreuzen. Das dynamische Verhalten der Geodäten ist chaotisch.

Das Ellipsoid

Auch beim Ellipsoid sind die Geodäten für ganz $\mathbb{R}$ definiert. Es gibt geschlossene Geodäten (wie auf der Kugel), aber auch Geodäten, die sich selbst immer wieder kreuzen. Das dynamische Verhalten der Geodäten ist chaotisch.

Wenn man die Ellipsoide immer flacher macht und den Grenzwert bildet, dann erhält man eine Ellipse mit einer Ober- und einer Unterseite. Die Geodäten konvergieren zu Polygonzügen, deren Eckpunkte am Rand der Ellipse liegen, sodass die Normale zur Ellipse den Winkel bei der Ecke halbiert ("Ellipsenbilliard"). Diese Polygonzüge zeigen ebenfalls chaotisches Verhalten.

Ellipsenbilliard

Vektorfelder und Differentialformen

Für jeden Punkt x einer Mannigfaltigkeit X sind der Tangentialraum T_xX und der Kotangentialraum T_x^*X dual zueinander. Mit der Riemann-Metrik hat man eine Möglichkeit, jedem Tangentialvektor in $v \in T_xX$ einen Vektor im Dualraum T_x^*X zuzuordnen, nämlich das lineare Funktional $w \mapsto g_x(v, w)$. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus von Vektorräumen

Vektorfelder und Differentialformen

Für jeden Punkt x einer Mannigfaltigkeit X sind der Tangentialraum T_xX und der Kotangentialraum T_x^*X dual zueinander. Mit der Riemann-Metrik hat man eine Möglichkeit, jedem Tangentialvektor in $v \in T_xX$ einen Vektor im Dualraum T_x^*X zuzuordnen, nämlich das lineare Funktional $w \mapsto g_x(v, w)$. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus von Vektorräumen und zeigt gleichzeitig, dass Tangentialbündel und Kotangentialbündel für Riemmansche Mannigfaltigkeiten immer isomorph sind.

Vektorfelder und Differentialformen

Für jeden Punkt x einer Mannigfaltigkeit X sind der Tangentialraum T_xX und der Kotangentialraum T_x^*X dual zueinander. Mit der Riemann-Metrik hat man eine Möglichkeit, jedem Tangentialvektor in $v \in T_xX$ einen Vektor im Dualraum T_x^*X zuzuordnen, nämlich das lineare Funktional $w \mapsto g_x(v, w)$. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus von Vektorräumen und zeigt gleichzeitig, dass Tangentialbündel und Kotangentialbündel für Riemmansche Mannigfaltigkeiten immer isomorph sind.

Ein Vektorfeld ist ein Schnitt des Tangentialbündels. Durch die Dualität wie oben erhält man einen Schnitt des Kotangentialbündels.

Zum letzten Mal: Gradienten

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Der Gradient wird in der Sprache der Differentialformen einfach als df geschrieben. Das duale Vektorfeld bezüglich einer Riemann-Metrik können wir nun mit vollem Recht als "Gradientenfeld" bezeichnen.

Zum letzten Mal: Gradienten

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Der Gradient wird in der Sprache der Differentialformen einfach als df geschrieben. Das duale Vektorfeld bezüglich einer Riemann-Metrik können wir nun mit vollem Recht als "Gradientenfeld" bezeichnen.

Proposition: Die Lösungskurven des Gradientenfelds von f stehen rechtwinklig zu den Tangentialhyperebenen der Hyperflächen $f = constant$.