Diese Notizen sind Teil der Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme" an der JKU Linz, WS 2017/18. Sie behandeln die Hamiltonsche Mechanik.

1 Vorübung: Volums-erhaltende Vektorfelder in der Ebene

Wie lassen sich Bewegungen von Körpern erklären bzw. mathematisch beschreiben? In den drei Newtonschen Axiomen

- ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte einwirken, verharrt in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung;
- Kraft ist Masse mal Beschleunigung;
- zu jeder Kraft gibt es eine Gegenkraft

wird festgestellt, daß es keinen Sinn hat, eine Erklärung für die Geschwindigkeit (1.Ableitung) von Körpern zu suchen. Dagegen unterliegt die Beschleunigung (2.Ableitung) Gesetzen, die einer mathematischen Beschreibung zugänglich sind.
In der Hamilton-Mechanik ist der Phasenraum eines oder mehrerer Teilchen immer von geradzahliger Dimension: zu jeder Ortskoordinate gibt es eine Geschwindigkeitskoordinate. Die Bewegung wird dann beschrieben durch ein Vektorfeld auf dem Phasenraum, d.h. eine Differentialgleichung erster Ordnung. (Allgemein haben wir gesehen, dass Systeme von beliebiger Ordung auf Systeme erster Ordnung zurückgeführt werden können mit Hilfe der Verwendung zusätzlicher Variablen.)
Das neue Element in der Hamilton-Mechanik (in Relation zu den Newton-schen Axiomen) ist die fundamentale Bedeutung von Erhaltungsgrößen. Darunter versteht man Funktionen vom Phasenraum in die reellen Zahlen, die entlang jeder Bahn konstant sind, oder equivalent dazu: deren vektorielle Ableitung identisch Null ist.

Bemerkung 1.1. Viele Besonderheiten von dynamischen Systemen sind unverträglich mit der Existenz von Erhaltungsgrößen: in der Nähe von Quellen, Senken, oder asymptotisch stabilen Zyklen muß jede Erhaltungsgröße notwendigerweise lokal konstant sein (und damit uninteressant). Die erwähnten Besonderheiten sind sogar strukturell stabil – das heißt, sie bleiben erhalten wenn das Vektorfeld geringfügig gestört wird; trotzdem treten sie in der Hamilton-Mechanik niemals auf, wie wir noch sehen werden. Dafür werden andere Besonderheiten dynamischer Systeme, nämlich Zentren und homokline Orbits, die durch kleine Störungen verloren gehen, in der Hamilton-Mechanik strukturell stabil.

Der Apparat ist nicht gerade leicht zugänglich, drum wird in diesem Abschnitt ein Spezialfall diskutiert, der weniger an Voraussetzunen benötigt, nämlich Volums-erhaltende Vektorfelder in der Ebene.

Im folgenden sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (F_1(x, y), F_2(x, y))$ ein stetig differenzerbares Vektorfeld.

Definition 1.2. Die Divergenz von F isi definiert als die Funktion

$$\operatorname{div}(F) : U \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y).$$

Definition 1.3. Es sei $\phi : D \subset \mathbb{R} \times U \to U$ der Fluß von F. Das Vektorfeld F heißt *volumserhaltend* wenn für alle meßbaren Teilmengen $K \subset U$ und für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ sodaß $[0, t_0] \times K \in D$ gilt, daß K und $\phi(t_0, K) = \{\phi(t_0, x) \mid x \in K\}$ das gleiche Volumen haben.

Der folgende Satz wird später bewiesen (mit starken Hilfsmitteln, von denen wir die meisten ohne Beweis diskutieren werden).

Satz 1.1. *F ist genau dann volumenserhaltend wenn* $\operatorname{div}(F) = 0$ *ist.*

Beispiel 1.2. Die Divergenz des linearen Vektorfelds

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

ist gleich der Konstante $a + d$. Die Eigenwerte der Jacobi-matrix sind dann $\pm\sqrt{ad - bc}$. Egal ob sie reell oder komplex sind, sie können nicht beide positiven oder beide negativen Realteil haben. Wir sehen, daß es (zumindest im linearen Fall) keine hyperbolischen Quellen oder Senken geben kann. Sattelpunkte treten auf und sind strukturell stabil. Der zweite Fall, der unter kleinen Störungen der Matrix – unter Beibehaltung der Bedingung $a + d = 0$ auftritt, ist der Fall von zwei konjugiert komplexen Eigenwerten auf der imaginären Achse. Hier ist der Nullpunkt ein so genanntes *Zentrum*: ein stabiler, aber nicht asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkte, der umgeben ist von lauter Zyklen.
Wir werden gleich sehen, daß dieses qualitative Verhalten auch für nichtlineare volunserhaltende Vektorfelder in der Ebene typisch ist.

Satz 1.3. *Es sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ volumserhaltend. Dann existiert eine nicht konstante stetig differenzierbare Funktion $H : U \to \mathbb{R}^2$, sodaß $\partial_F(H) \equiv 0$ ist.*

Proof. Wir setzen an

$$H(x, y) := -\int_0^x F_2(u, 0)du + \int_0^y F_1(x, v)dv.$$

Dann gilt für alle $(x, y) \in U$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -F_2(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, v)dv = -F_2(x, 0) - \int_0^y \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, v)dv =$$

$$-F_2(x, 0) - (F_2(x, y) - F_2(x, 0)) = -F_2(x, y),$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) = F_1(x, y)$$

und daher

$$\partial_F(H)(x, y) = -F_2(x, y)F_1(x, y) + F_1(x, y)F_2(x, y) = 0.$$

□

Wir merken uns aus dem Beweis, dass das Vektorfeld F aus H zurückgewonnen werden kann:

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)\right).$$

Die Lösungen von F bewegen sich auf den Niveau-Linien von H. Wenn p_0 ein lokales Maximum oder Minimum ist, dann sind die Niveau-Linien in einer kleinen Umgebung geschlossene Kurven, und wir erhalten Zyklen. Wenn man eine Funktion mit zwei lokalen Maxima hat, dann liegt dazwischen ein Sattelpunkte, und die Niveau-Linie in der Höhe des Sattelpunktes besteht aus einer 8-Schleife mit Kreuzungspunkt im Sattelpunkt. Die beiden Schleifen sind homokline Orbits. Wenn die Funktion H geringfügig gestört wird, bleibt das qualitative Verhalten gleich: wir bekommen immer noch einen Sattelpunkt mit zwei homoklinen Orbits.
Das gleiche Verhalten zeigt auch ein schwingendes Pendel. Der Phasenraum ist zweidimensional, parametrisiert durch die Auslenkung und die Geschwindigkeit. Es gibt zwei Gleichgewichtspunkte, beide mit Geschwindigkeit 0. Der Pendeltiefpunkt ist ein stabiles Zentrum, kleine Abweichungen geben kleine und langsame Schwingungen. Der Pendelhochpunkt ist ein Sattelpunkt. Das Gleichgewicht ist instabil, und die Bahnen in der Nähe schwingen zum Tiefpunkt und wieder zurück. Es gibt genau zwei Bahnen, die im Grenzwert genau den Sattelpunkt erreichen, nämlich wenn das Energieniveau genau dazu reichen würde, bei Geschwindigkeit Null den Hochpunkt zu erreichen.

Übung 1.4. Es sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit einem asymptotisch stabilen Zykel Z. Man zeige, daß jede Erhaltungsgröße $g : U \to \mathbb{R}^2$ lokal in einer Umgebung von Z konstant ist.

2 Differentialformen

In der Vorübung haben wir gesehen, wie man für eine gegebene Funktion $H : U \to \mathbb{R}$ ein Vektorfeld konstruiert, für welches H eine Erhaltungsgröße ist. Und zwar im Fall $n = 2$. Wie läßt sich diese Konstruktion für beliebige gerade Zahlen verallgemeinern?

Bemerkung 2.1. Eine allgemeine Konstruktion eines Vektorfelds aus einer Funktion ist der Gradient. Dieses Feld erfüllt aber leider gerade nicht die gewünschte Eigenschaft: die Vektorableitung entlang des Gradienten ist immer positiv außer bei Equilibrien.

Zur Verallgemeinerung benötigen wir ein neues Konzept, das der Differentialformen. Dazu muß n nicht unbedingt gerade sein.

Definition 2.2. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Eine Differentialform k-ter Ordung oder k-Form ist eine stetig differenzierbare Abbildung $U \to \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.
Wir schreiben die Komponenten einer k-form als Koeffizienten von symbolischen Ausdrücken der Form $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$, wobei $x_1, \ldots, x_k$ Variablen sind und die Verknüpfung $\wedge$ antikommutativ ist, also $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ erfüllt für beliebige Variablen x, y. Daher ist auch $dx \wedge dx = 0$ und die Anzahl der Koeffizientenfunktionen einer k-Form ist $\binom{n}{k}$.
Die Menge aller k-Formen auf U wird mit $\Omega^k(U)$ bezeichnet.

Beispiel 2.1. Es sei $U = \mathbb{R}^2$. Alle 1-Formen die Gestalt $f(x, y)dx + g(x, y)dy$. Alle 2-Formen haben die Gestalt $h(x, y)dx \wedge dy$.

Differentialformen sind dazu erfunden worden, integriert zu werden. Für die 1-Form $f(x, y)dx + g(x, y)dy$ im Beispiel oben und für jede Kurve $C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (X(t), Y(t))$ ist das Kurvenintegral definiert als

$$\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_0^1 f(X(t), Y(t))\frac{dX(t)}{dt}dt + \int_0^1 g(X(t), Y(t))\frac{dY(t)}{dt}dt.$$

Der Wert des Kurvenintegrals bleibt unverändert, wenn man die Kurve umparametrisiert.

Übung 2.3. Es sei η die 1-Form $xdx - ydy$ in $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Man berechne $\int_C \eta$ für die Kurve $C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^a, t^b)$, wobei $a, b > 0$ Parameter sind.

Die positiven n-Formen (von maximaler Ordnung) nennt man auch Volumsformen. Wenn η eine Volumsform ist, dann ist die Zuordnung $K \mapsto \int_K \eta$ ein Volumsmaß. Die Integrale von 2-Formen sind definiert auf Flächenstücken mit Orientierung. Solche Flächenintegrale werden zum Beispiel dazu verwendet, um zu berechnen, welche Flüssigkeitsmenge in eine gegebenen Zeit durch eine gegebene Querschnittsfläche fließt.
Eine triviale Variante des Integrals hat man bei den 0-Formen, das heißt Funktionen nach $\mathbb{R}$. Das Integral ist für Punkte definiert, und es ist einfach die Auswertung beim Punkt.

Bemerkung 2.4. Vektorfelder auf U und 1-Formen auf U haben die gleiche "Implementierung", beide sind stetig diffenzierbare Funktionen $U \to \mathbb{R}^n$. Trotzdem will man die zwei Dinge unterscheiden (indem man zu jeder Funktion dazusagt, ob das jetzt ein Vektorfeld oder eine 1-Form ist). Die Unterscheidung ist sinnvoll/notwendig, weil Vektorfelder und 1-Formen verschiedene Operationen erlauben und verschiedene Eigenschaften haben.

- Vektorfelder bestimmen einen Fluß und eine Differentialgleichung, 1-Formen nicht.
- Ein Vektorfeld ordnet jeder differenzierbaren Funktion $U \to \mathbb{R}$ eine andere Funktion zu, nämlich die vektorielle Ableitung. 1-Formen hingegen orden jeder differenzierbaren Kurve $[0, 1] \to \mathbb{R}$ eine Zahl zu, das Kurvenintegral.
- Vektorfelder und 1-Formen verhalten sich anders unter Koordinatentransformationen.

Tatsächlich sind 1-Formen oder überhaupt k-Formen leichter zu transformieren als Vektorfelder: man setzt ein, ersetzt $df(x_1, \ldots, x_n)$ durch die Gradientenform $\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ und beachte beim Ausmultiplizieren des Hackprodukts die Antikommutativität (für 1-Formen ist nicht einmal das notwendig). Zum Beispiel ist die Transformation der Volumsform $dx \wedge dy$ in Polarkoordinaten

$$d(r\cos\phi) \wedge d(r\sin\phi) = (\cos\phi\ dr - r\sin\phi\ d\phi) \wedge (\sin\phi\ dr + r\cos\phi\ d\phi) =$$
$$\cos\phi\sin\phi\ dr \wedge dr + r(\cos\phi)^2 dr \wedge d\phi - r(\sin\phi)^2 d\phi \wedge dr - r^2\cos\phi\sin\phi\ d\phi \wedge d\phi =$$
$$r((\cos\phi)^2 + (\sin\phi)^2)\ dr \wedge d\phi = r\ dr \wedge d\phi.$$

Sie erinnern sich an Übungszettel 7 und 9: um Vektorfelder zu transformieren, muß man nach dem Einsetzen und Umformen auch noch ein Gleichungssystem lösen (oder eine Jacobi-Matrix invertieren).
Differentialformen kann man nicht nur bezüglich Korrdinatentransformationen (Isomorphismen) transformieren: das Einsetzen und Ausmultiplizieren geht genauso wenn man nur eine Abbildung $f : U \to V$ hat; U und V müssen dabei nicht einmal die selbe Dimension haben. Die Rücktransformation von $\eta \in \Omega^k(V)$ nach f ergibt eine k-Form $f^*\eta \in \Omega^k(U)$ (oder 0 wenn $k > \dim U$ ist). In jedem Fall gilt die allgemeine Substitutionsformel

$$\int_{f(K)} \eta = \int_K f^*\eta$$

für k-dimensionale Flächenstücke in V. Zur Berechnung eines Integrals einer k-form auf einer k-dimensionalen Fläche kann man eine Parametrisierung $p : U \to K$ mit $U \subset R^k$ nehmen und dann die rücktransformierte k-Form auf U integrieren.

Übung 2.5. Man berechne das Kurvenintegral von Übung 2.3 durch Rücktransformation der 1-Form $xdx - ydy$ entlang der Parametrisierung $C : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^a, t^b)$.

Definition 2.6. Die *äußere Ableitung* $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ ist definiert durch die folgenden Rechenregeln:

- $df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$ für $f \in \Omega^0(U)$;
- $d(f\ dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k) = df \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$
- $d(\eta_1 + \eta_2) = d\eta_1 + d\eta_2$.

Eine Differentialform $\eta \in \Omega^k(U)$ heißt *geschlossen*, wenn $d\eta = 0$ ist.

Zweimalige äußere Ableitung gibt immer 0. Daher is jede Differentialform der Form $d\gamma$ geschlossen. Für $U = \mathbb{R}^n$ oder die für das Kugelinnere $U = \{x \mid x < \epsilon\}$ gilt auch die Umkehrung: jede geschlossene Form kann also Ableitung geschrieben werden.
Wie man aus der Definition sieht, ist der Gradient einer Funktion kein Vektorfeld, sondern eine 1-Form. Oder besser gesagt, es macht mehr Sinn, den Gradient als 1-Form zu verstehen. Die Variablen Die folgende Übung soll das verdeutlichen.

Übung 2.7. Das lineare Vektorfeld $(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$ ist ein Gradientenfeld, wenn $a_2 = b_1$ ist. Man zeige, daß eine lineare Koordinatentransformation enes linearen Gradientenfeldes nicht immer ein Gradientenfeld ist.
Wann ist eine 1-Form $(a_1x + b_1y)dx + (a_2x + b_2y)dy$ geschlossen? Man zeige, daß jede lineare Koordinatentransformation einer geschlossenen linearen 1-Form wieder geschlossen ist.

Neben dem Gradient lassen sich auch die Operatoren div und curl als Spezialfälle der äußeren Ableitung interpretieren.

- Es sei $F : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n))$ ein Vektorfeld. Wir schreiben das Vektorfeld rein formal um als $(n-1)$-Form $\eta := F_1(x_1, \ldots, x_n)dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n - F_2(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n - \ldots \pm F_n(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$. Dann ist $d\eta = \mathrm{div}(F)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

- Die äußere Ableitung der 1-Form $\eta := F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$ in $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$ ist die 2-Form

$$d\eta = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1.$$

  Man vergleiche mit der Formel für die Rotation (curl) eines Vektorfelds im $\mathbb{R}^3$.

Der nächste Satz (allgemeine Stokesche Integralformel) wird in dieser Vorlesung nicht verwendet, ich möchte ihn aber trotzdem (ohne Beweis) erwähnen, weil es eben der wichtigste Satz über die äußere Ableitung ist.

Satz 2.2. *Es sei $\eta \in \Omega^k$ und K ein $k+1$-dimensionales Flächenstück mit Rand δK. Dann gilt*

$$\int_{\delta K} \eta = \int_K d\eta.$$

Hier die wichtigsten Spezialfälle.

- $k = 1$: Das Kurvenintegral des Gradienten von f ist die Differenz der Auswertung der Funktion an den Endpunkten der Kurve.
- $k = 2, n = 3$ (Gaußscher Integralsatz): das Integral der Divergenz von F über eines dreidimensionalen Bereich K ist das Oberflächenintegral von F entlang des Randes.
- $k = 1, n = 3$ (Satz von Stoke): das Kurvenintegral eines Vektorfelds entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich dem Flächenintegral der Rotation über ein einem Flächenstück, das von dieser Kurve begrenzt wird.

Definition 2.8. Für k-Formen $\eta \in \Omega^k(U)$ und Vektorfelder $F : U \to \mathbb{R}^n$ ist die *Verkürzung* $i_F(\eta)$ definiert als eine $k-1$-Form durch folgende Rechenregeln.

- $i_{(F_1,\ldots,F_n)}(dx_i \wedge \eta) = F_i \eta$.
- $i_F(f\eta_1 + \eta_2) = f i_F(\eta_1) + i_F(\eta_2)$ für alle $f : U \to \mathbb{R}$, das heißt die Verkürzung ist linear über dem Ring der Funktionen.

Um die Verkürzung zu berechnen, muß man nichts ableiten, nur multiplizieren und addieren.

Wir haben bereist die vektorielle Ableitung einer Funktion besprochen. Auch für Differentialformen ist die vektorielle Ableitung definiert.

Definition 2.9. Es sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit Fluß $\phi : (D \subset \mathbb{R} \times U) \to U$. Für jede k-Form η ist die vektorielle Ableitung definiert durch

$$\partial_F(\eta) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi_t^*(\eta) - \eta}{t},$$

wobei $\phi_t(x) := \phi(t, x)$ ist.

Proposition 2.3. *Für Vektorfelder $F : U \to \mathbb{R}^n$ und k-Formen η gilt die Formel*

$$\partial_F(\eta) = d(i_F(\eta)) + i_F(d\eta).$$

Übung 2.10. Man zeige, daß die Formel für 0-Formen stimmt.

Wir können nun den Beweis von Satz 1.1 nachtragen: ein Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ ist volumserhaltend, wenn die vektorielle Ableitung der konstanten Volumsform verschwindet: $\delta_F(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) \equiv 0$. Nach Proposition 2.3 ist das equivalent zo $d(i_F(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)) \equiv 0$ (der zweite Summand in der Formel verschwindet, weil die äußere Ableitung einer k-Form 0 ist). Wenn $F = (F_1, \ldots, F : n)$ ist, dann ist

$$i_F(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = F_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n - F_2 dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n - \ldots \pm F_n dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$$

und daher

$$d(i_F(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = \operatorname{div}(F) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n;$$

und diese Form ist genau dann 0 wenn $\operatorname{div}(F) \equiv 0$ ist.