Übung 14 (27.1.2019)

Beispiel 4. Das Vektorfeld $F : (x, y) \mapsto (x - x^3 - y^3, y + x^3 - y^3)$ hat nur ein einziges Equilibrium in $(0, 0)$ (wie man mit Mathematica ode Maple zeigen kann). Es sei $g : (x, y) \mapsto x^4 + y^4$. Man berechne $\partial_F(g)$ und zeige, dass es einen kompakten Bereich K gibt, aus dem die Lösungen nicht entkommen können (Fangbereich). Man folgere, dass F einen Zykel enthält.

Für die vektorielle Ableitung erhalten wir

$$\partial_F(g) = \left\langle \begin{pmatrix} x - x^3 - y^3 \\ y + x^3 - y^3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4x^3 \\ 4y^3 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x^2(1 - x^2) + 4y^2(1 - y^2).$$

Um einen Fangbereich zu konstruieren, gehen wir ähnlich vor wie bei der Untersuchung der Lorenz-Gleichung, Skriptum 13.2 (Chaos). Es sei $E := \{p \mid \partial_F(g)(p) \geq 0\}$. Diese Menge ist enthalten im Quadrat $[-2, 2] \times [-2, 2]$, also kompakt. Wir wählen M so, dass $K := \{p \mid g(p) \leq M\}$ die Menge E enthält – also $M := \max\{g(p) \mid p \in E\}$. Nun ist K ein Fangbereich. Um das zu zeigen, nehmen wir indirekt an, dass eine Lösung $f : [0, t_1] \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung existiert mit $f(0) \in K$ und $f(t_1) \notin K$. Die Funktion $h := g \circ f : [0, t_1] \to \mathbb{R}$ hätte dann folgende Eigenschaften:

- Wenn $h'(t) \geq 0$ ist, dann folgt $f(t) \in E \subset K$ und daher $h(t) \leq M$.
- $h(0) \leq M$ und $h(t_1) > M$.

So eine Funktion kann es nicht geben. Wenn $t_2 \in [0, t_1]$ das Supremum aller $t \in [0, t_1]$ mit $h(t) \leq M$ ist, gilt $h(t_2) < h(t_1)$, $t_2 < t_1$, und $f'(t) < 0$ für alle $t \in (t_2, t_1)$, im Widerspruch zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung.
Dieser Fangbereich enthält ein Equilibrium $p_0 = (0, 0)$, aber dieses ist eine Quelle. Daher existiert eine Ljapunov-Funktion für das umgedrehte Vektorfeld $-F$ auf einer Umgebung U von p_0. Wenn man einen offenen Fangbereich für $-F$ aus K herausnimmt, hat man eine kompakten Fangbereich von F, der keine Equilibrien enthält. Nach dem Satz von Poincare-Bendixsohn existiert ein Grenzzykel.
Den Grenzzykel kann man mit einer Computer-Visualisierung ansehen. Es ist allerdings nicht klar, ob diese Kurve algebraisch ist, das heißt, ob eine polynomiale Gleichung dafür existiert.