Übungsblatt 1

für den **13/10/2020**

Beispiel 1 a) Die geometrische Reihe kann rekursiv definiert werden als das System

$$\forall t \in \mathbb{N} : a(t+1) = q\, a(t),\ \ s(t+1) = s(t) + a(t)$$

mit Startwerten $a(0) = 1$ und $s(0) = 0$. Man schreibe das System als vektorwertige Rekursion in der Form $(a, s)(t+1) = M \cdot (a, s)(t)$.

b) Zeige, dass das resultierende System gelöst werden kann, in dem man für alle $n \in \mathbb{N}$ den Ausdruck M^n berechnet.´Überprüfe dies in dem damit die bekannte Formel der geometrischen Reihe hergeleitet wird.

Beispiel 2 Sei X ein Vektorraum der Dimension d, $k \in \mathbb{N}$ und $F : X^k \times \mathbb{N} \to X$ eine lineare Abbildung in X^k. Zeige, dass die Menge der Lösungen

$$L = \{f : \mathbb{N} \to X \mid \forall t \in \mathbb{N} : f(t+k) = F(f(t), \dots, f(t+k-1), t)\}$$

ein Vektorraum der Dimension $k\, d$ ist.

Hinweis: Zeige, dass die Abbildung $\psi :\ L \to X^k,\ f \mapsto (f(0), \dots, f(k-1))$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

Beispiel 3 a) Führe für $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}\, f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\, f'(t) + a_0\, f(t) + b(t) = 0 \qquad (1)$$

auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurück.

b) Unter welchen Bedingungen an b ist das neue System linear?

Beispiel 4 Man zeichne für $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ein Phasenportrait der Differentialgleichung $f'(t) = F(f(t))$ mit

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)\,(x-2)}{\sqrt{x}-1} & \text{falls } x \neq 1 \\ -2 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$