Zeitschrift für Operations Research, Band 16, 1972, Seite 137–143. Physica-Verlag, Würzburg

# Bemerkung zu den Reduzierbarkeitskriterien von *R. Albrecht* für das Optimum-Mix-Problem

Von *B. Buchberger*, Innsbruck [1])

Eingegangen am 13. März 1971

*Zusammenfassung:* Es wird ein neues Reduzierbarkeitskriterium für das Optimum-Mix-Problem abgeleitet, das sich als häufiger anwendbar als ein in [*Albrecht*, 1967] angegebenes Kriterium erweist.

*Summary:* We give a new reducibility criterion for the optimum mix problem. It is shown that this criterion can be applied more frequently than a similar criterion that can be found in [*Albrecht*, 1967].

## 1. Fragestellung und Bezeichnungen

Zur Beschreibung der Fragestellung sei auf [*Albrecht*, 1967] verwiesen. Sie wird hier kurz wiedergegeben, um die notwendigen Bezeichnungen einführen zu können.

Es seien $n$ verschiedene „Hilfsmitteltypen" vorhanden, die man zur Lösung von $m$ verschiedenen „Aufgaben" heranziehen kann. Die Hilfsmitteltypen bezeichnen wir mit den Nummern $1, \ldots, n$, die Aufgaben mit den Nummern $1, \ldots, m$. Für jede Aufgabe $i$ ($i = 1, \ldots, m$) sei festgelegt, durch welche Hilfsmitteltypen sie gelöst werden kann und wieviel Stück $a_{i,k}$ (positive reelle Zahlen) des Hilfsmitteltyps $k$ man zur Lösung der Aufgabe $i$ braucht, wenn z. B. $k$ ein Hilfsmitteltyp ist, der die Aufgabe $i$ löst. Jede Aufgabe soll sich wenigstens durch einen Hilfsmitteltyp lösen lassen. Keineswegs muß sich jede Aufgabe durch jeden Hilfsmitteltyp lösen lassen.

Eine „Strategie" gibt für jede Aufgabe $i$ genau einen Hilfsmitteltyp $k_i$ an, mit dem die Aufgabe gelöst werden soll, kann also durch das $m$-Tupel $(k_1, \ldots, k_m)$ charakterisiert werden.

Jeder Strategie sind auf die folgende Weise die „Kosten der Strategie" zugeordnet: Zunächst sei für jeden Hilfsmitteltyp $k$ eine Funktion $f_k(s)$ definiert (für $s \geq 0$). $f_k(s)$ gibt den „Stückpreis für den $k$-ten Hilfsmitteltyp, wenn insgesamt $s$ Stück dieses Hilfsmitteltyps verwendet (gekauft) werden". Entsprechend gibt $s' \cdot f_k(s)$ ($s' \leq s$) den „Preis von $s'$ Stück des Hilfsmitteltyps $k$, wenn insgesamt $s$

[1]) Dr. *B. Buchberger*, Institut für numerische Mathematik und elektronische Informationsverarbeitung, Universität Innsbruck, A-6020 Innsbruck, Innrain 52.

Stück dieses Hilfsmitteltyps gekauft werden". In Übereinstimmung mit dieser Interpretation wird über die Funktionen $f_k(s)$ vorausgesetzt ($F_k(s) = s \cdot f_k(s)$ bezeichnet den „Gesamtpreis"):

$$f_k(s) > 0 \quad \text{für} \quad s > 0\,; \tag{1.1}$$

$$f_k(s') \leq f_k(s) \quad \text{für} \quad s' > s > 0\,; \tag{1.2}$$

$$F_k(s') > F_k(s) \quad \text{für} \quad s' > s\,, \tag{1.3}$$

d. h. der Gesamtpreis ist streng monoton wachsend;

$$\frac{F_k(s'') - F_k(s')}{s'' - s'} \leq \frac{F_k(s') - F_k(s)}{s' - s} \quad \text{für} \quad s < s' < s''\,, \tag{1.4}$$

d. h. $F_k(s)$ ist von oben konvex.

Aus (1.4) folgt leicht:

$$F_k(s') - F_k(s' - a) \leq F_k(s) - F_k(s - a) \quad \text{für} \quad a \leq s \leq s'\,. \tag{1.5}$$

Für eine Strategie ST $= (k_1, \ldots, k_m)$ wird durch

$$s_k^{ST} = \sum_{i \in I_k^{ST}} a_{ik} \quad \text{mit} \quad I_k^{ST} = \{i \mid 1 \leq i \leq m,\, k_i = k\}$$

die Anzahl der Hilfsmittel des Typs $k$, die bei der Strategie ST verwendet werden, berechnet ($k = 1, \ldots, n$) und durch

$$K_{\mathrm{ST}} = \sum_{k=1}^{n} F_k(s_k^{\mathrm{ST}})$$

schließlich die Kosten der Strategie.

Unter den endlich vielen möglichen Strategien ist eine solche zu suchen, die diese Kosten minimiert.

## 2. Die Reduzierbarkeitskriterien von *R. Albrecht*

In [*Albrecht*, 1967] sind zwei Kriterien angegeben, die es erlauben, gewisse Hilfsmitteltypen als für eine optimale Strategie nicht in Frage kommend überhaupt auszuscheiden bzw. sie wenigstens zur Verwendung für eine bestimmte Aufgabe auszuscheiden. Eine ALGOL-Prozedur für einen auf diesen Kriterien aufbauenden Lösungsalgorithmus findet sich in [*Albrecht* und *Buchberger*, 1970].

Mit den Bezeichnungen

$I_k = \{i \mid 1 \leq i \leq m,$ Aufgabe $i$ läßt sich durch den $k$-ten Hilfsmitteltyp lösen$\}$

$$S_k = \sum_{i \in I_k} a_{i,k}$$

$L_{r,k} = \{i \mid 1 \leq i \leq m,$ Aufgabe $i$ wird bei jeder Strategie, die die Aufgabe $r$ mit dem Hilfsmitteltyp $k$ löst, ebenfalls mit $k$ gelöst$\}$

lauten die Kriterien:

*Kriterium 2.1:*

Es mögen die Voraussetzungen (1.1) bis (1.3) gelten. Für jedes $r \in I_k$ existiere ein $l_r$, so daß

$$a_{r,k} \cdot f_k(S_k) > a_{r,l_r} \cdot f_{l_r}\left(\sum_{i \in L_{r,l_r}} a_{i,l_r}\right). \tag{2.1}$$

Dann wird der Hilfsmitteltyp $k$ von einer optimalen Strategie überhaupt nicht benützt.

*Kriterium 2.2:*

Es mögen die Voraussetzungen (1.1) bis (1.4) gelten. Für ein $r \in I_k$ existiere ein $l_r$, so daß

$$F_k(S_k) - F_k(S_k - a_{r,k}) > a_{r,l_r} \cdot f_{l_r}\left(\sum_{i \in L_{r,l_r}} a_{i,l_r}\right). \tag{2.2}$$

Dann wird der Hilfsmitteltyp $k$ von einer optimalen Strategie nicht zur Lösung der Aufgabe $r$ benutzt.

## 3. Ein neues Kriterium

Wir beweisen das folgende

*Kriterium 3.1:*

Es mögen die Voraussetzungen (1.1) bis (1.4) gelten. Die Aufgaben $1, \ldots, i-1$ seien durch $k_1, \ldots, k_{i-1}$ gelöst. $k_i$ und $k_i'$ seien Hilfsmitteltypen, die beide die Aufgabe $i$ lösen können. Es gelte

$$\begin{aligned} &F_{k_i}\left(\sum_{j \in L^{k_i}_{k_1,\ldots,k_{i-1}}} a_{j,k_i} + a_{i,k_i}\right) - F_{k_i}\left(\sum_{j \in L^{k_i}_{k_1,\ldots,k_{i-1}}} a_{j,k_i}\right) \\ &\quad \leq F_{k_i'}\left(\sum_{j \in I^{k_i'}_{k_1,\ldots,k_{i-1}}} a_{j,k_i'} + a_{i,k_i'}\right) - F_{k_i'}\left(\sum_{j \in I^{k_i'}_{k_1,\ldots,k_{i-1}}} a_{j,k_i'}\right), \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei

$L^{k_i}_{k_1,\ldots,k_{i-1}} = \{j \mid 1 \leq j \leq m,\ j \neq i,\ j$ wird bei jeder Strategie, die die Aufgaben $1, \ldots, i-1$ mit $k_1, \ldots, k_{i-1}$ löst, mit $k_i$ gelöst$\}$

und

$I^{k_i'}_{k_1,\ldots,k_{i-1}} = \{j \mid (1 \leq j \leq i-1$ und $k_j = k_i')$ oder $(i+1 \leq j \leq m$ und $j$ ist mit $k_i'$ lösbar$)\}$.

Dann ist eine Strategie $(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i', k_{i+1}, \ldots, k_m)$ ($k_{i+1}, \ldots, k_m$ beliebige verwendbare Hilfsmitteltypen) entweder nicht optimal oder es ist auch $(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_m)$ eine optimale Strategie, d. h. also: man kann alle Strategien $(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i', k_{i+1}, \ldots, k_m)$ mit festen $k_1, \ldots, k_{i-1}$ und allen möglichen $k_{i+1}, \ldots, k_m$ ausscheiden.

*Beweis:*

Wir betrachten die beiden Strategien

$$\mathrm{ST} = (k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_m) \quad \text{und} \quad \mathrm{ST}' = (k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i', k_{i+1}, \ldots, k_m),$$

die mit Ausnahme der $i$-ten Aufgabe alle Aufgaben gleich lösen. Es gilt:

$$K_{\mathrm{ST}} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_i\\k\neq k_i'}}^{n} F_k(s_k^{\mathrm{ST}}) + F_{k_i}(s_{k_i}^{\mathrm{ST}}) + F_{k_i'}(s_{k_i'}^{\mathrm{ST}})$$

und

$$K_{\mathrm{ST}'} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq k_i\\k\neq k_i'}}^{n} F_k(s_k^{\mathrm{ST}}) + F_{k_i}(s_{k_i}^{\mathrm{ST}} - a_{i,k_i}) + F_{k_i'}(s_{k_i'}^{\mathrm{ST}} + a_{i,k_i'}).$$

Somit

$$K_{\mathrm{ST}} \leq K_{\mathrm{ST}'} \Leftrightarrow F_{k_i}(s_{k_i}^{\mathrm{ST}}) - F_{k_i}(s_{k_i}^{\mathrm{ST}} - a_{i,k_i}) \leq F_{k_i'}(s_{k_i'}^{\mathrm{ST}} + a_{i,k_i'}) - F_{k_i'}(s_{k_i'}^{\mathrm{ST}}). \tag{3.2}$$

Andererseits gilt wegen (1.5)

$$F_{k_i}\Bigl(\sum_{j\in L_{k_1,\dots,k_{i-1}}^{k_i}} a_{j,k_i} + a_{i,k_i}\Bigr) - F_{k_i}\Bigl(\sum_{j\in L_{k_1,\dots,k_{i-1}}^{k_i}} a_{j,k_i}\Bigr) \geq F_{k_i}(s_{k_i}^{\mathrm{ST}}) - F_{k_i}(s_{k_i}^{\mathrm{ST}} - a_{i,k_i}),$$

weil $\sum_{j\in L_{k_1,\dots,k_{i-1}}^{k_i}} a_{j,k_i} + a_{i,k_i} \leq s_{k_i}^{\mathrm{ST}}$, und

$$F_{k_i'}\Bigl(\sum_{j\in I_{k_1,\dots,k_{i-1}}^{k_i'}} a_{j,k_i'} + a_{i,k_i'}\Bigr) - F_{k_i'}\Bigl(\sum_{j\in I_{k_1,\dots,k_{i-1}}^{k_i'}} a_{j,k_i'}\Bigr) \leq F_{k_i'}(s_{k_i'}^{\mathrm{ST}} + a_{i,k_i'}) - F_{k_i'}(s_{k_i'}^{\mathrm{ST}}),$$

weil $\sum_{j\in I_{k_1,\dots,k_{i-1}}^{k_i'}} a_{j,k_i'} + a_{i,k_i'} \geq s_{k_i'}^{\mathrm{ST}} + a_{i,k_i'}$.

Falls also die Bedingung (3.1) gilt, so gilt (3.2) und zwar für alle möglichen $k_{i+1},\dots,k_m$, also $K_{\mathrm{ST}} \leq K_{\mathrm{ST}'}$ für alle Strategienpaare ST und ST′ mit festen $k_1,\dots,k_{i-1}$ und variablen $k_{i+1},\dots,k_m$, d. h. die Behauptung von 3.1 ist richtig.

Falls nun speziell $i = 1$, so lautet Kriterium 3.1:

*Kriterium 3.1′:*

Falls für zwei Hilfsmitteltypen $k_1$ und $k_1'$ (die die Aufgabe 1 lösen)

$$F_{k_1}\Bigl(\sum_{j\in L^{k_1}} a_{j,k_1} + a_{1,k_1}\Bigr) - F_{k_1}\Bigl(\sum_{j\in L^{k_1}} a_{j,k_1}\Bigr) \leq F_{k_1'}\Bigl(\sum_{j\in I^{k_1'}} a_{j,k_1'} + a_{1,k_1'}\Bigr) - F_{k_1'}\Bigl(\sum_{j\in I^{k_1'}} a_{j,k_1'}\Bigr),$$

so können alle Strategien, die die Aufgabe 1 mit $k_1'$ lösen, ausgeschieden werden. (Zum Vergleich mit Kriterium 2.2 bemerken wir, daß $L^{k_1} \cup \{1\} = L_{1,k_1}$ und $I^{k_1'} \cup \{1\} = I_{k_1'}$).

Da die Wahl der Aufgabe 1, wie man sich durch Durchsicht des Beweises von Kriterium 3.1 überzeugt, nur eine willkürliche Spezialisierung ist, gilt auch:

*Kriterium 3.1″:*

Falls für zwei Hilfsmitteltypen $k$ und $l_r$ (die die Aufgabe $r$ lösen)

$$F_{l_r}\Bigl(\sum_{j\in L_{r,l_r}} a_{j,l_r}\Bigr) - F_{l_r}\Bigl(\sum_{j\in L_{r,l_r}} a_{j,l_r} - a_{r,l_r}\Bigr) \leq F_k(S_k) - F_k(S_k - a_{r,k}),$$

so können alle Strategien, die die Aufgabe $r$ mit $k$ lösen, ausgeschieden werden.

Abgesehen davon, daß in Kriterium 3.1″ das $\leq$-Zeichen und in Kriterium 2.2 das $<$-Zeichen steht, sind die Kriterien sehr ähnlich (bei Verwendung des $\leq$-

Zeichens im Kriterium 3.1″ werden möglicherweise optimale Strategien ausgeschieden, jedoch mindestens eine optimale Strategie zurückerhalten, bei Verwendung des $<$-Zeichens werden alle optimalen Strategien zurückbehalten).

Wir setzen abkürzend $x = \sum_{j \in L_{r,l_r}} a_{j,l_r}$, $a = a_{r,l_r}$, $f(x) = f_{l_r}(x)$. Es gilt nun wegen (1.2)

$$x \cdot f(x) - (x - a) \cdot f(x - a) \leq a \cdot f(x),$$

denn

$$(x - a) \cdot f(x) \leq (x - a) \cdot f(x - a).$$

Das heißt also:

*Satz 3.2:*

Aus dem Erfülltsein des Kriteriums 2.2 folgt immer das Erfülltsein des Kriteriums 3.1″.

Mit anderen Worten: das Kriterium 3.1″ ist unter den gleichen Voraussetzungen über die Kostenfunktionen eventuell öfter anwendbar, d. h. es können sich bei 3.1″ Reduktionen ergeben, die sich mit 2.2 noch nicht ergeben hätten (siehe auch Satz 4.1).

## 4. Rechenzeiten

Über die Effizienz des Kriteriums 3.1″ gibt zunächst folgender Satz Aufschluß:

*Satz 4.1:*

Zu jeder natürlichen Zahl $z$ kann ein Beispiel gefunden werden, so daß die Kriterien 2.1 und 2.2 für dieses Beispiel keine Reduktionen bringen, die Anwendung des Kriteriums 3.1″ jedoch gegenüber dem systematischen Durchprobieren eine Rechenzeitverkürzung um den Faktor $z$ bringt.

*Beweis:*

Wir bestimmen aus $z$ eine natürliche Zahl $m > 2$, für die $z < \dfrac{2^m}{4(m-1)}$ gilt, und betrachten das folgende Beispiel: es seien $m$ Aufgaben zu lösen, zur Verfügung stehen zwei Hilfsmitteltypen. Alle Aufgaben mit Ausnahme der ersten können mit beiden Hilfsmitteltypen gelöst werden. Die erste Aufgabe kann nur durch den zweiten Hilfsmitteltyp gelöst werden. Alle definierten $a_{i,k}$ haben den Wert 1. Weiteres setzen wir fest

$$F_1(x) = x,$$

$$F_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad 0 \leq x < 1 \\ d(x-1) + 2 & \text{für} \quad x \geq 1, \end{cases}$$

wobei

$$\frac{m-2}{m-1} < d < 1.$$

Für $k = 1$ ist Kriterium 2.1 nicht erfüllt, denn für jedes $r \geq 2$ gilt:

$$a_{r,k} \cdot f_k(S_k) = 1 \cdot 1 = 1\,,$$

$$a_{r,2} \cdot f_2(2) = 1 \cdot \frac{d+2}{2} > \frac{\dfrac{m-2}{m-1} + 2}{2} = \frac{3m-4}{2m-2} > 1 \quad \text{(wegen } m > 2\text{)}.$$

Ebenso ist Kriterium 2.2 nicht anwendbar, denn für alle $r \geq 2$:

$$F_k(S_k) - F_k(S_k - a_{r,k}) = 1 \quad \text{(für } k = 1\text{)}.$$

Kriterium 3.1″ ist jedoch erfüllt, denn mit $r = 2$, $l_r = 2$ gilt:

$$F_2(2) - F_2(1) = d < 1\,.$$

Die Aufgabe 2 kann also von einer optimalen Strategie nicht mit dem Hilfsmitteltyp 1 gelöst werden.

Wir nehmen an: es sei mit dem Kriterium 3.1″ erkannt worden, daß die Aufgaben $2, \ldots, i-1$ $(3 \leq i \leq m)$ von einer optimalen Strategie nicht mit dem Hilfsmitteltyp 1 gelöst werden können. Wir zeigen:

Für $k = 1$ ist Kriterium 2.1 noch immer nicht anwendbar, denn für alle $r \geq i$ gilt:

$$a_{r,k} \cdot f_k(S_k) = 1 \cdot 1 = 1\,,$$

$$a_{r,2} \cdot f_2(i) = 1 \cdot \frac{d(i-1)+2}{i} > \frac{\dfrac{m-2}{m-1}(i-1) + 2}{i} \geq 1 \quad \text{(wegen } m \geq i\text{)}.$$

Für $k = 1$ ist Kriterium 2.2 ebensowenig anwendbar. Aber wieder ist Kriterium 3.1″ (mit $r = i$, $l_r = 2$) erfüllt:

$$F_2(i) - F_2(i-1) = d < 1\,.$$

Das heißt also, daß wieder mit Hilfe von 3.1″ der erste Hilfsmitteltyp zur Lösung der $i$-ten Aufgabe ausgeschieden werden kann. Zusammenfassend ergibt das: die Kriterien 2.1 und 2.2 können zur Reduktion der Aufgabe nichts beitragen (sogar dann nicht, wenn man, nachdem die Aufgabe mit Kriterium 3.1″ reduziert wurde, noch einmal versucht, die Kriterien 2.1 und 2.2 anzuwenden). $(m-1)$-maliges Anwenden des Kriteriums 3.1″ reduziert die Aufgabe aber auf die optimale Strategie, bei der alle Aufgaben mit dem zweiten Hilfsmitteltyp gelöst werden. Insgesamt sind dazu $4(m-1)$ Aufrufe der Funktionen $F_1$, $F_2$ notwendig gegenüber $2 \cdot 2^{m-1}$ Funktionsaufrufen beim systematischen Durchproblieren (unter der Voraussetzung, daß das systematische Durchprobieren optimal organisiert wird: siehe [*Albrecht* und *Buchberger*, 1970]). Wenn man die Anzahl der Funktionsaufrufe als ein (wohl sehr vernünftiges) Maß für die Rechenzeit nimmt, so ergibt sich also eine Verbesserung der Rechenzeit um den Faktor

$$\frac{2^m}{4(m-1)} > z\,, \quad \text{q.e.d.}$$

Natürlich sind zwischen diesen günstigen Fällen und dem Fall, in dem auch 3.1″ keine Reduktion bringt, alle Fälle möglich. Es ist deshalb unmöglich, einen „objektiven" Verbesserungsfaktor anzugeben. Im Hinblick darauf ist auch der Wert von Testrechnungen fraglich. Dennoch wurde ein ALGOL-Programm geschrieben (vor allem, um zu experimentieren, wie das allgemeinere Kriterium 3.1 rechentechnisch verwendet werden kann). Testrechnungen an zahlreichen Beispielen, deren mögliche Strategienanzahl alle in der Gegend zwischen 500 und 10000 lagen, ergaben „durchschnittlich" eine Verminderung der notwendigen Funktionsaufrufe auf ein Sechstel.

## Literaturverzeichnis

*Albrecht, R.*: Zum Optimum-Mix-Problem bei nichtlinearen monotonen Kostenfunktionen, Unternehmensforschung, **11**, 253–258, 1967.

*Albrecht, R.* und *B. Buchberger*: Algorithmus 13: Lösung eines Optimum-Mix-Problemes, Computing, **5**, 324–331, 1970.