P5 - 5788

Б. Бухбергер

АССОЦИИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ И ОПЕРАТОР ОБУСЛОВЛЕННОЙ ИТЕРАЦИИ

I. Ассоциирующие функции

Мы введем следующие обозначения: N – множество неотрицательных целых чисел. Пусть А – любое множество. Через F^A мы обозначим множество всех частичных функций любого числа аргументов, где аргументы и значения функций – элементы из А.

Пусть F – множество функций, тогда F_n – множество всех n -арных функций из F, например, $F^A = \bigcup\limits_n F_n^A$.

Для $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$

(I.I) $u_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$,

и для $n \geqslant 1$, $y \in A$

(I.2) $c_y^n(x_1, \ldots, x_n) = y$.

$U^A(C^A)$ – множество всех $u_i^n(c_y^n)$ из F^A.

Понятия подстановки частичных функций из F^A и оператора минимизации и примитивной рекурсии мы будем употреблять в обычном смысле (см. Мальцев [6], стр. 32).

Определение I.I: $\alpha \in F_2^A$, $\sigma \in F_3^A$ называются ассоциирующими функциями (АФ) для А, если

(A1) $(\exists \varepsilon \in A)(\forall a \in A)(\alpha(a,\varepsilon) = \varepsilon)$ и

(A2) $(\forall b,s,a,c \in A)\left(\alpha(b,\sigma(s,a,c)) = \begin{cases} c & \text{, если } b = a \\ \alpha(b,s) & \text{, если } b \neq a \end{cases}\right)$.

Это определение отражает следующее интуитивное представление: $c = \alpha(a,s)$ читается: c есть элемент ("содержимое"), соответствующий в памяти s элементу ("адресу") a, или c есть

a-ая компонента памяти s. $s' = \sigma(s, a, c)$;
читается: s' есть память, которая для всех адресов $b \neq a$ выдает то же самое содержимое, что и s, и только адресу соответствует данное содержимое c. (A2) гарантирует это свойство, (AI) гарантирует существование "пустой" памяти ε, содержимое которой известно, а именно пусто для всех адресов.

Мы требуем, чтобы в A существовали хотя бы два элемента. Пусть α, σ – в дальнейшем факсированные АФ.

Условимся писать также $a \circ s$ или s_a вместо $\alpha(a, s)$. Запись эта двусмысленна: например, x_i теперь может быть переменной с индексом для элементов из A ($i \in N$ или i – переменная для элементов из N), или x_i обозначает $\alpha(i, x)$, причем i и x – элементы из A. Чтобы избежать этой двусмысленности, мы условимся о следующем употреблении переменных: переменные i, j, k, l, m, n, t могут принимать только значения из множества N. Эти символы и числовые символы 0,I,2,3,.... как индексы обозначают обыкновенное индексирование, все остальные символы, написанные как индексы, обозначают применение функции α вышеуказанным образом. Мы введем еще для $n \geq 2$

$$s_{a_1, \ldots, a_n} = \alpha(a_n, s_{a_1, \ldots, a_{n-1}}) =$$
$$= \alpha\left(U_n^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, s), U_{n+1}^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, s)_{U_1^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, s), \ldots, U_{n-1}^{n+1}(a_1, \ldots, a_n, s)}\right),$$
откуда сразу следует

Лемма I.I: $(n+1)$-арные функции $s_{a_1, \ldots, a_n}$ из α и функций из U^A можно получить с помощью подстановок (для $n \geq 1$).

Мы фиксируем $\omega \neq \varepsilon$ и определяем $\bar{0} = \sigma(\varepsilon, \omega, \omega)$,
$\nu(x) = \sigma(\varepsilon, \varepsilon, x) = \sigma(C_\varepsilon^1(x), C_\varepsilon^1(x), U_1^1(x))$,

$\overline{n+1} = \nu(\bar{n})$ для $n \geq 0$.

Легко проверить справедливость следующих лемм:

Лемма I.2: функцию ν можно получить из $\sigma, c_\varepsilon^1, u_1^1$ с помощью подстановок.

Лемма I.3: $\bar{n} \neq \varepsilon$ для $n \geqslant 0$ и

$\bar{m} \neq \bar{n}$ для $m < n$.

Эскиз доказательства для леммы I.3: $\bar{0} \neq \varepsilon$, так как $\varepsilon_\omega = \varepsilon$, но $\bar{0}_\omega = \omega \neq \varepsilon$. Итак, $\bar{1} \neq \bar{0}$, потому что $\bar{1}_\varepsilon = \bar{0}$, но $\bar{0}_\varepsilon = \varepsilon \neq \bar{0}$, а также $\bar{1} \neq \varepsilon$, потому что $\bar{1}_\varepsilon = \bar{0}$, но $\varepsilon_\varepsilon = \varepsilon \neq \bar{0}$.
Для произвольного n : индукция по n.

Из леммы I.3 вытекает:

Лемма I.4: множество A, для которого существуют АФ, бесконечно.

Введем теперь две сокращенных записи, употребляющие скобки $\langle , \rangle$ и $[,]$.

$$\langle x \rangle = \sigma(\varepsilon, \bar{0}, x) = \sigma(c_\varepsilon^1(x), c_{\bar{0}}^1(x), u_1^1(x)),$$

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \sigma(\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle, \overline{n-1}, x_n) =$$

$$= \sigma(\langle u_1^n(x_1, \dots, x_n), \dots, u_{n-1}^n(x_1, \dots, x_n) \rangle, c_{\overline{n-1}}^n(x_1, \dots, x_n), u_n^n(x_1, \dots, x_n))$$

для $n \geqslant 2$.

Так как c_y^n из c_y^1 и u_1^n можно получить подстановкой $(c_y^n(x_1, \dots, x_n) = c_y^1(u_1^n(x_1, \dots, x_n)))$, справедлива

Лемма I.5: n-арные функции $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ из σ и функций, принадлежащих C_1^A, U^A, можно получить подстановками (для $n \geqslant$ I).

Кроме того, справедлива и

лемма I.6: для $n \geqslant 1$

$$\langle x_1, \cdots, x_n \rangle_a = \begin{cases} x_1 & \text{если} \quad a = \bar{0} \\ x_2 & \text{если} \quad a = \bar{1} \\ \vdots & \\ x_n & \text{если} \quad a = \overline{n-1} \\ \varepsilon & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство: для $n=1$ с помощью (A1), дальше индукцией по n, причем лемма I.3 играет важную роль.

$[s, a, c] = \sigma(s, a, c)$,

$[s, a^{(1)}|\ldots|a^{(t)}, c] = [s, a^{(1)}|\ldots|a^{(t-1)}, \sigma(s_{a^{(1)}, \ldots a^{(t-1)}}, a^{(t)}, c)]$ для $t \geq 2$,

$[s, a_1^{(1)}|\ldots|a_1^{(t_1)}, c_1, \ldots, a_n^{(1)}|\ldots|a_n^{(t_n)}, c_n] =$

$= [[s, a_1^{(1)}|\ldots|a_1^{(t_1)}, c_1, \ldots, a_{n-1}^{(1)}|\ldots|a_{n-1}^{(t_{n-1})}, c_{n-1}], a_n^{(1)}|\ldots|a_n^{(t_n)}, c_n]$

для $n \geq 2$ и $t_j \geq 1$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Аналогично лемме I.5 справедлива и

Лемма I.7: $(\sum_{j=1}^{n} t_j + n + 1)$-арные функции $[s, a_1^{(1)}|\ldots|a_1^{(t_1)}, c_1, \ldots, a_n^{(1)}|\ldots|a_n^{(t_n)}, c_n]$ из α, σ и функций, принадлежащих U^A, можно получить только подстановками.

$[s, a_1^{(1)}|\ldots|a_1^{(t_1)}, c_1, \ldots, a_n^{(1)}|\ldots|a_n^{(t_n)}, c_n]$ – удобная запись для комплексной процедуры изменения содержимого в памяти s. Например, $[s, a|b, u, c|d|e, v]$ должна изменить содержимое памяти s следующим образом: b-ая компонента a-ой компоненты памяти s будет u, а e-ая компонента d-ой компоненты c-ой компоненты памяти s будет v, все остальные компоненты останутся без изменения.

В дальнейшем нам нужны только следующие леммы об этих функциях, которые доказываются индукцией по t_1 и n.

Лемма I.8: Пусть для всех $j,k \leq n$, $j \neq k$

$$\neg (a_j^{(1)} = a_k^{(1)} \,\&\, \dots \,\&\, a_j^{(t_j)} = a_k^{(t_j)}).$$

Тогда

$$[s, a_1^{(1)} | \dots | a_1^{(t_1)}, c_1, \dots, a_n^{(1)} | \dots | a_n^{(t_n)}, c_n]_{b^{(1)}, \dots, b^{(t)}} = (c_l)_{b^{(t_l+1)}, \dots, b^{(t)}}, \quad \text{если}$$
$$a_l^{(1)} = b^{(1)} \,\&\, \dots \,\&\, a_l^{(t_l)} = b^{(t_l)}.$$

(мы полагаем, что $(c_l)_{b^{(t_l+1)}, \dots, b^{(t)}} = c_l$, если $t_l = t$).

Лемма I.9: Пусть для всех $j, k \leq n$, $j \neq k$

$\neg (a_j^{(1)} = a_k^{(1)} \,\&\, \dots \,\&\, a_j^{(t_j)} = a_k^{(t_j)})$. Тогда

$$[s, a_1^{(1)} | \dots | a_1^{(t_1)}, c_1, \dots, a_n^{(1)} | \dots | a_n^{(t_n)}, c_n]_{b^{(1)}, \dots, b^{(t)}} = s_{b^{(1)}, \dots, b^{(t)}}, \quad \text{если}$$

$$\neg (a_j^{(1)} = b^{(1)} \,\&\, \dots \,\&\, a_j^{(t_j)} = b^{(t_j)}) \,\&\, \neg (b^{(1)} = a_j^{(1)} \,\&\, \dots \,\&\, b^{(t)} = a_j^{(t)}) \quad \text{для всех } j \leq n.$$

Приведем теперь один пример.

Пусть $A = N$, $p_0 = 2$, p_n — n-ое простое число,

$p(a, z)$ — показатель при p_a в разложении числа z на простые множители $(a \geq 0,\ z \geq 1)$ и для $z \geq 1$ $l(z) = \mu_t\, (exp(u,z) = 0$ для $u \geq t)$.

Мы определим

$$\alpha(a, s) = exp(a, s+1)$$

$$\sigma(s, a, c) = p_a^c \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq a}}^{l(s+1)-1} p_j^{exp(j, s+1)} - 1,$$

причем полагаем $\prod_{j=k}^{l} b_j = 1$ для $j > l$. Нетрудно доказать, что (A1) и (A2) выполнены с $\varepsilon = 0$.

2. Теорема представления для рекурсивных функций

Определение 2.I: Пусть α, σ — $A\Phi$ для A.
Оператор "обусловленной итерации" p каждой функции $\varphi \in F_1^A$ ставит в соответствие функцию φ^p, определенную следующим образом:

$$\varphi^p(\xi) = \begin{cases} \xi & \text{если } \xi_{\sigma,\alpha} = \bar{o}, \\ \varphi^p(\varphi(\xi)) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $s(x) = x+1 \quad (x \in N)$ и F^{rek} - множество всех частичных рекурсивных функций. Наша цель - доказательство следующей теоремы о представлении рекурсивных функций.

Теорема 2.I: Пусть α, σ — $A\Phi$ для N.
Тогда каждую частичную рекурсивную функцию можно получить из функций α, σ, c_0^1, s и функций из U^N только подстановками и <u>одним</u> применением оператора p.

На самом деле будет доказана более общая теорема 2.2, из которой теорема 2.I легко следует. Для формулировки теоремы 2.2 нам нужны следующие определения.

Определение 2.2: Для $H \subset F^A$ $B(H)$ $(B^1(H))$ обозначает множество функций, которые можно получить из функций, принадлежащих множеству H, подстановками и применениями (одним применением) оператора p.

Определение 2.3 (Strong [8] , стр. 468):

Множество функций $F < F^A$ удовлетворяет аксиомам "основной теории рекурсивных функций" (ОТРФ)[ж)], если

(0I) $U^A \subset F$, $C^A \subset F$

(02) $(\exists \psi \in F_4)(\forall a,b,c,x)\left(\psi(a,b,c,x) = \begin{cases} b & \text{, если } x=a \\ c & \text{иначе} \end{cases}\right)$,

(03) F **замкнуто относительно подстановки,**

(04) **(существование универсальных функций для всех** $m>0$ **):**

$(\exists \Phi_m \in F_{m+1})(F_m = \{f \mid f(x_1,\dots,x_m) = \Phi_m(x,x_1,\dots,x_m)$ **для** $x \in A\})$

(05) (s-m-n **"теорема") для всех** $m,n>0$ **:**

$(\exists S^m_n \in F_{m+1})(\forall x,x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)(S^m_n(x,x_1,\dots,x_m)$ **определено**

и $\Phi_n(S^m_n(x,x_1,\dots,x_m),y_1,\dots,y_n) = \Phi_{m+n}(x,x_1,\dots,x_m,y_1,\dots,y_n)$.

Теперь может быть сформулирована

Теорема 2.2:Пусть g – произвольная функция из F_1^A, α, σ – АФ для A, а $G = \{g,\alpha,\sigma\} \cup U^A \cup C_1^A$ **, тогда**

I. $B(G)$ **удовлетворяет аксиомам ОТРФ**

2. $B(G) = B^1(G)$

Из теоремы 2.2 естественно вытекает (например, полагая $g=\alpha$ **)**

Следствие 2.3: Пусть $\bar{G}=\{\alpha,\sigma\} \cup U^A \cup C_1^A$ **, тогда**

I. $B(\bar{G})$ **удовлетворяет аксиомам ОТРФ**

2. $B(\bar{G}) = B_1(\bar{G})$.

====================

ж) по-английски: basic recursive function theory.

Чтобы получить теорему 2.I из теоремы 2.2, мы используем известную теорему 2.4.

Теорема 2.4 (см., например, Friedmann [3], стр.2,I, или Wagner [II], стр. 5): Пусть $F^* \in F^N$, F^* удовлетворяет аксиомам ОТРФ и $S \in F^*$, тогда $F^{rek} \subset F^*$.

Итак, для любых $A\Phi\ \alpha, \sigma$ (для N) $F_{B^1} = B_1(\{s, \alpha, \sigma\} \cup U^N \cup C_1^N)$ удовлетворяет аксиомам ОТРФ (согласно теореме 2.2 с $g = s$ и $A = N$) и, очевидно, $s \in F_{B^1}$, т.е., согласно теореме 2.4, $F^{rek} \subseteq F_{B^1}$.
Так как функции $c_y^1 \in C_1^N$ сами получены из s и c_0^1 подстановками $(c_y^1(x) = \underbrace{s(s(\cdots s(c_0^1(x))\cdots))}_{y\ \text{подстановок}})$, теорема 2.I доказана, в предположении, что теорема 2.2 верна.

Справедливо и

Следствие 2.5: Пусть α, σ — $A\Phi$ для N, причем $\alpha, \sigma \in F^{rek}$. Тогда $B^1(\{\alpha, \sigma, s, c_0^1\} \cup U^N) \subseteq F^{rek}$.

Вместе с теоремой 2.I это дает

Следствие 2.6: Пусть α, σ – АФ для N, причем $\alpha, \sigma \in F^{rek}$.
Тогда $B^1(\{\alpha, \sigma, s, c_0^1\} \cup U^N) = F^{rek}$.

Доказательство следствия 2.5:

Согласно Davis [2], определение I.I, стр. 4I, достаточно свести оператор P к подстановке, примитивной рекурсии и оператору μ:

$$\varphi^P(\xi) = \varphi^*(\xi, \mu_t(\varphi^*(\xi, t)_{\delta,\bar{\sigma}} = \bar{0})) \quad , \qquad \text{причем}$$
$$\varphi^*(\xi, 0) = \xi$$
$$\varphi^*(\xi, t+1) = \varphi(\xi, \varphi^*(\xi, t)).$$

Остается теперь доказательство теоремы 2.2: Для этого сначала надо проверить требования (0I),…,(05) (определение 2.3) для $B(G)$.

(0I) $U^A \subset B(G)$ по определению множества G.

Кроме того, $C^n_Y(x_1, \ldots, x_n) = C^1_Y(U^n_1(x_1, \ldots, x_n)) \in B(G)$ для любых $n \in N$ и $Y \in A$.

(02) Нетрудно доказать (лемма I.7), что

$$\Psi(a,b,c,x) = (a \cdot \underbrace{\sigma(\varepsilon, x, \bar{1})}) \cdot \underbrace{[\varepsilon, \varepsilon, c, \bar{1}, b]}$$

удовлетворяет аксиоме (02).

В дальнейшем вместо $\Psi(a,b,c,d)$ мы будем писать $(a = x \to b \text{ иначе} \to c)$ и сокращать

$$(a_1 = x_1 \to b_1, \text{иначе} \to (a_2 = x_2 \to b_2, \text{иначе} \to (\cdots (a_n = x_n \to b_n, \text{иначе} \to c) \ldots)))$$

записью $(a_1 = x_1 \to b_1, a_2 = x_2 \to b_2, \ldots, a_n = x_n \to b_n \text{ иначе} \to c)$.

Легко проверить, что

Лемма 2.7: $(3n+1)$ -арная функция, представленная выражением $(a_1 = x_1 \to b_1, \ldots, a_n = x_n \to b_n, \text{иначе} \to c)$ из функций, принадлежащих G, получается только подстановками.

(03) удовлетворено по определению.

(04) Мы определяем функции Φ_m $(m > 0)$, которые окажутся универсальными.

$\Phi_m(x, x_1, \ldots, x_m) = eval(\langle x, \langle x_1, \ldots, x_n \rangle, \eta \rangle)_{\bar{0}, \bar{4}, \bar{0}}$, причем

$\eta = \langle\langle \bar{0}, \bar{0}, \bar{0} \rangle\rangle$,

$eval(\xi) = \Omega^P(\xi)$,

$\Omega(\xi) =$

$(\xi_{\bar{0},\bar{0}} = \bar{1} \to subst(\xi_{\bar{2}}, g(\xi_{\bar{1},\bar{0}}))$,

$\xi_{\bar{0},\bar{0}} = \bar{2} \to subst(\xi_{\bar{2}}, \xi_{\bar{1}, \xi_{\bar{0},\bar{1}}})$,

$\xi_{\bar{0},\bar{0}} = \bar{3} \to subst(\xi_{\bar{2}}, \xi_{\bar{0},\bar{1}})$,

$\xi_{\bar{0},\bar{0}} = \bar{4} \to subst(\xi_{\bar{2}}, \alpha(\xi_{\bar{1},\bar{0}}, \xi_{\bar{1},\bar{1}}))$,

$\xi_{\bar 0,\bar 0} = \bar 5 \longrightarrow subst\,(\xi_{\bar 2}\,, \sigma\,(\xi_{\bar 1,\bar 0}\,, \xi_{\bar 1,\bar 1}\,, \xi_{\bar 1,\bar 2}))\,,$

$\xi_{\bar 0,\bar 0} = \bar 6 \longrightarrow (\xi_{\bar 0,\bar 1} = \xi_{\bar 0,\bar 2} \longrightarrow [\xi, \bar 0, \xi_{\bar 0,\bar 3}\,, \bar 1, \xi_{\bar 0,\bar 4}],\ иначе \longrightarrow [\xi, \bar 0, \xi_{\bar 0,\bar 4,\xi_{\bar 0,\bar 2}}, \bar 2, \xi])\,,$

$\xi_{\bar 0,\bar 0} = \bar 7 \longrightarrow (\xi_{\bar 1,\bar 0,\bar 0,\bar 0} = \bar 0 \longrightarrow subst\,(\xi_{\bar 2}\,, \xi_{\bar 1,\bar 0}),\ иначе \longrightarrow [\xi, \bar 0, \xi_{\bar 0,\bar 1}\,, \bar 2, [\xi, \bar 0/\bar 0, \bar 8]])\,,$

$\xi_{\bar 0,\bar 0} = \bar 8 \longrightarrow (\xi_{\bar 0,\bar 4,\bar 0,\bar 0,\bar 0} = \bar 0 \longrightarrow subst\,(\xi_{\bar 2}\,, \xi_{\bar 0,\bar 4,\bar 0}),\ иначе \longrightarrow [\xi, \bar 0, \xi_{\bar 0,\bar 1}\,, \bar 1, \xi_{\bar 0,\bar 4}\,, \bar 2, [\xi, \bar 0/\bar 2, \bar 0]])\,,$

$\xi_{\bar 0,\bar 0} = \bar 9 \longrightarrow (\xi_{\bar 0,\bar 2} = \xi_{\bar 0,\bar 3} \longrightarrow [\xi, \bar 0, \xi_{\bar 0,\bar 4}\,, \bar 1, \xi_{\bar 0,\bar 3}]\,,$

$иначе \longrightarrow [\xi, \bar 0/\bar 5/\xi_{\bar 0,\bar 1}, \xi_{\bar 1,\xi_{\bar 0,\bar 2}}, \bar 0/\bar 1, \nu(\xi_{\bar 0,\bar 1}), \bar 0/\bar 2, \nu(\xi_{\bar 0,\bar 2})])\,,$

$иначе \longrightarrow \bar 0\,)\,,$

$subst\,(d, r) = [d, \bar 0/\bar 4/d_{\bar 0,\bar 2}\,, r, \bar 0/\bar 2, \nu(d_{\bar 0,\bar 2})].$

Нам нужно важное для дальнейшего свойство функции $eval(\xi)$ **(Лемма 2.10). Мы обозначим** $\xi_{\bar 2^0} = \xi$, $\xi_{\bar 2^k} = (\xi_{\bar 2^{k-1}})_{\bar 2}$ $\bar N = \{x | x = \bar n$ **для** $n \in N\}$ **и определим**

Определение 2.5:

$$\xi \sim \xi' :\Longleftrightarrow (\exists k)((\forall i < k)(\xi_{\bar 2^i,\bar 0,\bar j} = \xi'_{\bar 2^i,\bar 0,\bar j} \quad \text{для } j = 0,1,2,3,$$
$$\xi_{\bar 2^i,\bar 0,\bar 4,a} = \xi'_{\bar 2^i,\bar 0,\bar 4,a} \quad \text{для } a \in A\,,$$
$$\xi_{\bar 2^i,\bar 0,\bar 3,a} = \xi'_{\bar 2^i,\bar 0,\bar 3,a} \quad \text{для } a \in A\,,$$
$$\xi_{\bar 2^i,\bar 1,a} = \xi'_{\bar 2^i,\bar 1,a} \quad \text{для } a \in A) \text{ и}$$
$$(\xi_{\bar 2^k} = \xi'_{\bar 2^k})).$$

Справедливы следующие леммы:

Лемма 2.8: Отношение $\xi \sim \xi'$ есть отношение эквивалентности.

Лемма 2.9: $\xi \sim \xi' \Longrightarrow \Omega(\xi) \sim \Omega(\xi')$.

Лемма 2.I0 $\xi \sim \xi' \Longrightarrow eval(\xi) \sim eval(\xi')$.

Эскиз доказательства для леммы 2.9: надо с помощью лемм I.8 и I.9 вычислить все компоненты величин $\Omega(\xi)$ и $\Omega(\xi')$, используемые в определении 2.5, и сравнить их.

Теперь мы докажем, что Φ_m обладают свойствами универсальных функций. Анализируя представление функции Φ_m и используя леммы I.I, I.2, I.5, I.7 и 2.7, получаем первое свойство, нужное для универсальности:

Лемма 2.II: $\Phi_m \in B^1(G)_{m+1}$ (для $m>0$).

Пусть теперь:

$${}^{\varphi}F_m = \{ f \mid f(x_1,\dots,x_m) = \Phi_m(x,x_1,\dots,x_m) \text{ для } x \in A \}.$$

${}^{\varphi}F = \bigcup\limits_m {}^{\varphi}F_m$. Ясно, что ${}^{\varphi}F_m \subseteq B(G)_m$, согласно лемме 2.II.

Свойство $B(G)_m \subseteq {}^{\varphi}F_m$ (для $m>0$) будет доказано, если установить, что $B(G) \subseteq {}^{\varphi}F$. Мы даже докажем, что $B(G) \subseteq {}^{\varphi}\bar{F}$ $(\subseteq {}^{\varphi}F)$, где

$${}^{\varphi}\bar{F} = \bigcup_m {}^{\varphi}\bar{F}_m \quad \text{и}$$

$${}^{\varphi}\bar{F}_m = \{ f \mid f(x_1,\dots,x_m) = \Phi_m(x,x_1,\dots,x_m) \ \&$$

$$(\forall d)\ eval(\langle x, \langle x_1,\dots,x_m\rangle, d\rangle) \sim$$

$$\sim eval(subst(d, f(x_1,\dots,x_m))) \quad \text{для } x \in A \}$$

$B(G) \subseteq {}^{\varphi}\bar{F}$ доказано, если справедливо:

(04.I) $G \subseteq {}^{\Phi}\bar{F}$

(04.2) ${}^{\Phi}\bar{F}$ замкнуто относительно подстановки

(04.3) ${}^{\Phi}\bar{F}$ замкнуто относительно оператора $\mathcal{P}$.

(04.I) Докажем $g \in {}^{\Phi}\bar{F}$. Пусть $\xi^{d} = \langle\langle \bar{1} \rangle, \langle x_1 \rangle, d \rangle$, где d произвольно.

Справедлива $\xi^{d}_{\bar{0},\bar{0}} = \bar{1}$, $\xi^{d}_{\bar{1},\bar{0}} = x_1$, $\xi^{d}_{\bar{2}} = d$ (лемма I.6) и $\xi^{d}_{\bar{0},\bar{0}} \neq \bar{0}$ (лемма I.3). Поэтому

(2.I) $eval(\xi^{d}) = eval(\Omega(\xi^{d})) = eval(subst(d, g(x_1)))$.

Отсюда,

(2.2) $\Phi_1(\langle\bar{1}\rangle, x_1) = eval(\langle\langle\bar{1}\rangle, \langle x_1\rangle, \eta\rangle)_{\bar{0},\bar{4},\bar{0}} = eval(\xi^{\eta})_{\bar{0},\bar{4},\bar{0}} =$
$= eval(subst(\eta, g(x_1)))_{\bar{0},\bar{4},\bar{0}} =$

(Лемма I.9) $=$ $subst(\eta, g(x_1))_{\bar{0},\bar{4},\bar{0}}$ (Лемма I.8) $=$ $g(x_1)$.

Из (2.I) и (2.2) видно, что $g \in {}^{\Phi}\bar{F}$.

Аналогично можно доказать $u^{n}_{i}, c^{n}_{y}, \alpha, \sigma \in {}^{\Phi}\bar{F}$.

Нужно только вместо $\langle\bar{1}\rangle$ последовательно подставить элементы $\langle\bar{2}, \overline{i-1}\rangle$, $\langle\bar{3}, y\rangle$, $\langle\bar{4}\rangle$ и $\langle\bar{5}\rangle$ в $eval(\xi^{d})$ и в соответствующую функцию Φ_m, и вычислить эти выражения.

(04.2) Пусть $h \in {}^{\Phi}\bar{F}_r$ и $f_1, \ldots, f_r \in {}^{\Phi}\bar{F}_n$ $(r \geq 1)$, т.е.

(2.3) $h(y_1, \ldots, y_r) = \Phi_r(h^{*}, y_1, \ldots, y_r)$,

(2.4) $f_i(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_n(f_i^{*}, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, r)$,

(2.5) $eval(\langle h^{*}, \langle y_1, \ldots, y_r\rangle, d\rangle) \sim eval(subst(d, h(y_1, \ldots, y_r)))$,

(2.6) $eval(\langle f_i^{*}, \langle x_1, \ldots, x_n\rangle, d\rangle) \sim eval(subst(d, f_i(x_1, \ldots, x_n)))$

для некоторых $g^{*}, f_1^{*}, \ldots, f_r^{*} \in A$.

Полагаем $\xi^d = \langle\langle \bar{6}, \bar{r}, \bar{0}, h^*, \langle f_1^*, \dots, f_r^* \rangle\rangle, \langle x_1, \dots, x_n \rangle, d \rangle$ и вычисляем

$$eval(\xi^d) = eval(\Omega(\xi^d)) \overset{(\xi^d_{\bar{0},\bar{1}} = \bar{r} + \bar{0} = \xi^d_{\bar{0},\bar{2}})}{=} eval([\xi^d, \bar{0}, \xi^d_{\bar{0},\bar{4},\xi_{\bar{0},\bar{2}}}, \bar{2}, \xi^d]) \sim$$

(Лемма 2.IO) (2.6)

$$\sim eval(\langle f_1^*, \langle x_1, \dots, x_n \rangle, \xi^d \rangle) \sim eval(subst(\xi^d, f_1(x_1, \dots, x_n))) \sim$$

(Лемма 2.IO)

$$\sim eval(\langle\langle \bar{6}, \bar{r}, \bar{1}, g^*, \langle f_1(x_1, \dots, x_n), f_2^*, \dots, f_r^* \rangle\rangle, \langle x_1, \dots, x_n \rangle, d \rangle).$$

Следующие шаги вычисления не требуют новых методов. Поэтому подробности опускаем.

Используя несколько раз определение функции Ω, лемму 2.IO, отношения (2.3),...,(2.6), индукцию по r, наконец, лемму 2.8, получим

(2.7) $eval(\xi^d) \sim eval(subst(d, g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n))))$

и

(2.8) $\Phi_n(\langle \bar{6}, \bar{r}, \bar{0}, h^* \langle f_1^*, \dots, f_r^* \rangle\rangle, x_1, \dots, x_n) = h(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_r(x_1, \dots, x_n))$.

(04.3) Пусть $h \in {}^{\Phi}\bar{F}_1$, т.е.

(2.9) $h(x_1) = \Phi_1(h^*, x_1)$,

(2.IO) $eval(\langle h^*, \langle x_1 \rangle, d \rangle) \sim eval(subst(d, \Phi_1(h^*, x_1))) = eval(subst(d, h(x_1)))$,

для некоторого $h^* \in A$.

Аналогично (04.2), используя теперь ветви $\xi_{\bar{0},\bar{0}} = \bar{7}$ и $\xi_{\bar{8},\bar{0}} = \bar{8}$ функции Ω и индукцию по числу итераций функции h, получим

(2.II) $eval(\langle\langle \bar{7}, h^*, \bar{0} \rangle, \langle x_1 \rangle, d \rangle) = eval(subst(d, h^p(x_1)))$

и

(2.I2) $\Phi_1(\langle \bar{7}, h^*, \bar{0} \rangle, x_1) = h^p(x_1)$.

(05) Мы определим для $m, n > 0$

$S_n^m(x, x_1, \dots, x_m) = \langle \bar{q}, \bar{m}, \bar{0}, \bar{n}, x, \langle x_1, \dots, x_m \rangle\rangle$. Верно $S_n^m \in B(G)_{m+1}$

Справедливость s-m-n теоремы доказывается вычислением выражения

$$eval(\langle\langle \bar{q}, \bar{m}, \bar{0}, \bar{n}, x, \langle x_1, \dots, x_m \rangle\rangle, \langle y_1, \dots, y_n \rangle, \eta \rangle)_{\bar{0},\bar{4},\bar{0}},$$

причем проводится индукция по n и используется "ветвь" $\xi_{\bar{8},\bar{8}} = \bar{q}$ функции Ω.

На этом первое утверждение теоремы 2.2 доказано. Второе утверждение этой теоремы следует из леммы 2.II и только что доказанного факта, что каждую функцию $f \in B(G)_n$ можно представить в виде $f(x_1, \dots, x_n) = \Phi_n(C_x^n(x_1, \dots, x_n), U_1^n(x_1, \dots, x_n), \dots, U_n^n(x_1, \dots, x_n))$ (для всех $n > 0$).

3. Теорема 2.I и семантика языков программирования

Мы исходим из мнения, что семантика языка программирования L может быть задана частичной рекурсивной функцией $\phi_L(p,d)$ двух аргументов, называющейся интерпретатором для L .

Натуральным числам p, d , кодирующим программу p^* и данное d^* из L по некоторой геделизации, соответствует число $r = \phi_L(p,d)$, кодирующее результат применения программы p^* к данному d^* . Это уточнение понятия "семантика языков программирования" развивается, кажется, в настоящее время (см. например, Успенский [9] , [10] , Blum [1] и работы Венской группы ИБМ, [4] , [5]).

По теореме 2.I можно теперь разложить такой интерпретатор $\phi_L(p,d)$ на три функции $\gamma_L(p,d), \bar{\Phi}_L(\xi)$ и $\rho_L(\xi)$, так что $\phi_L(p,d) = \rho_L(\bar{\Phi}^{\rho}_L(\gamma_L(p,d)))$, причем $\gamma_L, \bar{\Phi}_L, s_L$ получены из α, σ, s, c^1_0 и функций, принадлежащих U^N , только подстановками.

Функцию $\gamma_L(p,d)$ можно интерпретировать как функцию, которая программе p и данному d поставит в соответствие "начальное состояние" $\xi_0 = \gamma_L(p,d)$. При этом для каждого p и d всегда выполняется то же самое конечное число операций, в сущности, "складывающих операций" с помощью α, σ. $\bar{\Phi}_L(\xi)$ можно понять как функцию перехода автомата, который выполняет настоящую вычислительную работу. При этом число итераций функции $\bar{\Phi}_L(\xi)$ зависит от начального состояния ξ_0 , а число операций в одном "шаге"(при одном применении $\bar{\Phi}_L(\xi)$), опять-таки,от складывающих операций и операций вида +I, фиксировано. Наконец, с помощью ρ_L "результат" вычисления прочитывается от окончательного состояния ξ_E (для которого $(\xi_E)_{\delta,0} = \bar{0}$), причем опять число операций фиксировано.

Возникает теперь следующая проблема, решение которой дало бы интересные сведения о языках программирования и принципах вычислительных машин: ищутся необходимые и достаточные условия для $\rho_L, \varphi_L, \gamma_L$ такие, чтобы функция

$$\Phi_L(p,d) = \rho_L(\bar{\varphi}_L^{p}(\gamma_L(p,d)))$$

определила эффективную геделевскую нумерацию для F_1^{rek} (Rogers [7], Успенский [IO], стр. 294, Strong [8]). Причем наиболее интересны, конечно, условия для $\bar{\varphi}_L$. Проблема эта до сих пор не решена.

Н.Н.Говорун, С.С.Лавров, Н.М.Нагорный, Елена Ногина и Г.А.Ососков мне помогали в разных стадиях работы. В.Душский и Е.Хирвонен мне дали особенно ценные советы. Ольга Ломидзе и А.И.Салтыков просмотрели русский текст работы. Им всем я выражаю свою глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА:

I. E.K.Blum. Towards a theory of semantics and compilers for programming languages. Journal of Computer and System Sciences. Vol.3, No 3, 1969.

2. M.Davis. Computability and Unsolvability. Mc Graw Hill Book Comp., 1958.

3. H.M.Friedmann. Axiomatic recursive function theory, Stanford University, 1969, unpublished.

4. P.Lauer. Formal definition of ALGOL 60. Technical Report TR 25.088, 1968, IBM Laboratory Vienna.

5. P.Lucas, P.Lauer, H.Stigleitner. Method and notation for the formal definition of programming languages. Technical Report TR 25.087, 1968.

6. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. Изд. "Наука", М. I965.

7. H.Rogers. Jr. Gödel numberings of partial recursive functions. JSL, vol.23/3, 1958.

8. H.R.Strong. Algebraically generalized recursive function theory. IBM Journal of Research and Development, Nov. 1968.

9. В.А.Успенский. Вычислимые операции и понятие программы. Успехи матем.наук I2, № I, I957.

IO. В.А.Успенский. Лекции о вычислимых функциях. Гос.изд. физ.-мат.лит., М., I960.

II. E.G.Wagner. Uniformly reflexive structures: on the nature of Gödelization and relative computability. Trans.Amer. Math. Soc., Vol. 144, October 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел I9 мая I971 года.