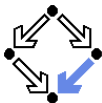


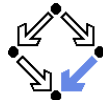
# Formale Grundlagen der Informatik 2

## Problemkomplexität

Wolfgang Schreiner  
Wolfgang.Schreiner@risc.uni-linz.ac.at

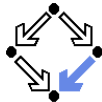
Research Institute for Symbolic Computation (RISC)  
Johannes Kepler University, Linz, Austria  
<http://www.risc.uni-linz.ac.at>



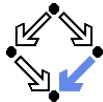


Wir betrachten entscheidbare Probleme (rekursive Sprachen) und fragen nach der möglichen Effizienz der Entscheidung (Erkennung).

- Die rekursive Sprache  $L$  hat **Zeitkomplexität**  $T(n)$  bzw. **Raumkomplexität**  $S(n)$ :
  - Es gibt eine Turing-Maschine mit Zeitkomplexität  $T(n)$  bzw. Raumkomplexität  $S(n)$ , die  $L$  erkennt und immer terminiert.
- Die rekursive Sprache  $L$  hat **nichtdeterministische Zeitkomplexität**  $T(n)$  bzw. **nichtdeterministische Raumkomplexität**  $S(n)$ :
  - Es gibt eine nichtdeterm. Turing-Maschine mit Zeitkomplexität  $T(n)$  bzw. Raumkomplexität  $S(n)$ , die  $L$  erkennt und immer terminiert.
- **$DTIME(T(n))$  und  $DSPACE(S(n))$** :
  - Die Familien der Sprachen mit Zeitkomplexität  $T(n)$  und Raumkomplexität  $S(n)$ .
- **$NTIME(T(n))$  und  $NSPACE(S(n))$** :
  - Die Familien der Sprachen mit nichtdeterministischer Zeitkomplexität  $T(n)$  und nichtdeterministischer Raumkomplexität  $S(n)$ .



- Sprache  $L := \{wcw^R \mid w \in \{0, 1\}^*\}$ 
  - $w^R$  ... die Umkehrung des Wortes  $w$ .
- $L$  hat Zeitkomplexität  $\mathcal{O}(n)$  und Raumkomplexität  $\mathcal{O}(n)$ .
  - Turing-Maschine  $M_1$  mit zwei Bändern.
  - Kopiert zunächst den Teil der Eingabe links von  $c$  auf zweites Band.
  - Bewegt danach synchron den L/S-Kopf des ersten Bandes nach rechts und den des zweiten Bandes nach links.
  - Die gelesenen Symbole werden verglichen; sind sie gleich und ist ihre Anzahl gleich, akzeptiert  $M$  das Wort.
  - Für Eingabe der Länge  $n$  werden  $n + 1$  Schritte benötigt und es wird die maximale Entfernung  $n$  vom linken Ende eines Bandes erreicht.



- $\mathcal{P}$  ist die Klasse aller Sprachen, die in deterministischer polynomialer Zeit erkannt werden:

$$\mathcal{P} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{DTIME}(n^i)$$

- $\mathcal{NP}$  ist die Klasse aller Sprachen, die in nichtdeterministischer polynomialer Zeit erkannt werden:

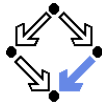
$$\mathcal{NP} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{NTIME}(n^i)$$

- $\text{PSPACE}$  ist die Klasse aller Sprachen, die mit deterministischem polynomialen Raum erkannt werden:

$$\text{PSPACE} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{DSpace}(n^i)$$

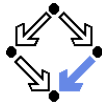
- $\text{NSPACE}$  ist die Klasse aller Sprachen, die mit nichtdeterministischem polynomialen Raum erkannt werden:

$$\text{NSPACE} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{NSpace}(n^i)$$



- Das Problem der **Hamiltonschen Zyklen**:  
*Gibt es im Graphen  $G$  einen Zyklus, der jede Ecke genau einmal enthält?*
- Das Problem ist in  $\mathcal{NP}$ , weil es einen einfachen nichtdeterministischen Algorithmus zur Lösung gibt:
  - Wähle eine Permutation der Ecken des Graphen.
  - Überprüfe, ob die Permutation einen Hamiltonschen Zyklus bildet.
- Die Zeitkomplexität des nichtdeterministischen Algorithmus ist die Zeitkomplexität der Überprüfung der “richtigen” Permutation.
  - Alle Permutationen werden quasi “gleichzeitig” untersucht.
  - Für einen Graphen mit  $n$  Knoten hat das Überprüfen jeder Permutation Zeitkomplexität  $\mathcal{O}(n)$ .

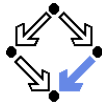
Es ist nicht bekannt, ob das Problem auch in  $\mathcal{P}$  ist (wahrscheinlich nicht).



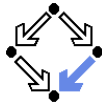
- Ein Problem in  $\mathcal{NP}$ :
  - Algorithmus kann zur Lösung des Problems das Ergebnis “erraten” und einen Algorithmus mit polynomialer Zeitkomplexität zur Überprüfung des Ergebnisses verwenden.
- Ein Problem in  $\mathcal{P}$ :
  - Algorithmus muss das Ergebnis in polynomialer Zeit konstruieren.
  - Nur Probleme in  $\mathcal{P}$  sind “praktisch” lösbar.
- Offensichtlich gilt  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$ .
  - Jeder deterministische Algorithmus ist der Spezialfall eines nichtdeterministischen Algorithmus.
- Gilt  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ?
  - Höchstwahrscheinlich nicht, das Gegenteil wäre eine Sensation.
  - Aber tatsächlich ist die Antwort unbekannt.

Die Frage  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ? ist das wohl größte ungelöste theoretische Problem der Informatik.

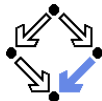
# Wissen über die Komplexitätsklassen



- **Satz:**  $\mathcal{NP} \subseteq \text{NSPACE}$ 
  - Jedes Problem, das in nicht-deterministisch polynomialer Zeit lösbar ist, ist mit nicht-deterministisch polynomialen Speicher lösbar.
    - Für jede Bewegung des L/S-Kopfes benötigt die Turing-Maschine eine Zeiteinheit; sie kann daher nicht mehr Speicher als Zeit benötigen.
- **Satz:**  $\text{NSPACE} = \text{PSPACE}$ 
  - Jedes Problem, das mit nicht-deterministisch polynomialen Speicher lösbar ist, ist auch mit deterministisch polynomialen Speicher lösbar.
    - Beweis: Savitch, 1970.
- Also gilt:  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP} \subseteq \text{PSPACE} = \text{NSPACE}$ 
  - Es ist unbekannt, ob  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ .
  - Es ist unbekannt, ob  $\mathcal{NP} = \text{PSPACE}$ .

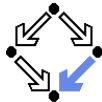


- Die Sprache  $L'$  ist **Polynom-Zeit-reduzierbar** auf Sprache  $L$ :
  - Es gibt eine Turing-Maschine mit polynomialer Zeitkomplexität, die für jede Eingabe  $x$  anhält und eine Ausgabe  $y$  erzeugt, sodass  $x \in L'$  genau dann wenn  $y \in L$ .
- **Satz:** Sei  $L'$  Polynom-Zeit-reduzierbar auf  $L$ . Dann gilt:
  1.  $L \in \mathcal{P} \Rightarrow L' \in \mathcal{P}$ .
  2.  $L \in \mathcal{NP} \Rightarrow L' \in \mathcal{NP}$ .
  - Beweis von (1): Sei  $L \in \mathcal{P}$ . Seien  $p_1(n)$  eine polynomiale Zeitschranke für die Reduktion von  $L'$  auf  $L$  und  $p_2(n)$  eine polynomiale Zeitschranke für die Erkennung von  $L$ . Für gegebenes  $x \in L'$  der Länge  $n$  berechnet man  $y$  in Zeit  $p_1(n)$ , die Länge von  $y$  ist daher auch beschränkt durch  $p_1(n)$ . Der Test  $y \in L$  kann also in Zeit  $p_2(p_1(n))$  ausgeführt werden. Für die Entscheidung  $x \in L'$  ist daher  $p_1(n) + p_2(p_1(n))$  eine polynomiale Zeitschranke.
  - Beweis von (2): analog.



# log-Raum-Reduktionen

- Ein **log-Raum Übersetzer**:
  - Eine immer haltende Turing-Maschine mit einem Eingabeband (nur zu lesen), einem Ausgabeband (nur zu schreiben), auf dem der LS-Kopf niemals nach links bewegt wird, und einem Arbeitsband, auf dem für eine Eingabe der Länge  $n$  nicht mehr als  $\log n$  Zellen verwendet werden.
- Die Sprache  $L'$  ist **log-Raum-reduzierbar** auf Sprache  $L$ :
  - Es gibt einen log-Raum-Übersetzer, der für jede Eingabe  $x$  eine Ausgabe  $y$  erzeugt, sodass  $x \in L'$  genau dann wenn  $y \in L$ .
- **Satz**: Sei  $L'$  Polynom-Zeit-reduzierbar auf  $L$ . Dann gilt:
  1.  $L \in \mathcal{P} \Rightarrow L' \in \mathcal{P}$ .
  2.  $L \in \text{DSPACE}(\log^k n) \Rightarrow L' \in \text{DSPACE}(\log^k n)$ .
  - Beweis von (1): Es genügt zu zeigen, dass die Reduktion von  $L'$  auf  $L$  nicht mehr als polynomiale Zeit benötigt (siehe letzten Beweis). Das Produkt  $P$  aus Anzahl der Zustände, Arbeitsbandinhalte und Positionen der L/S-Köpfe auf Eingabeband und Arbeitsband ist eine Obergrenze für die Anzahl der Rechenschritte:  $P = |Q| \cdot |\Gamma|^{\log n} \cdot n \cdot \log n \leq |Q| \cdot n^{\log |\Gamma|} \cdot n \cdot n = |Q| \cdot n^{2+\log |\Gamma|}$



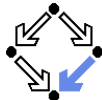
# Vollständige Probleme

Um zeigen, dass  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ , sollte man als Kandidaten für ein Element von  $\mathcal{NP} \setminus \mathcal{P}$  ein möglichst "schwieriges" Problem in  $\mathcal{NP}$  heranziehen.

- Eine Sprache  $L$  ist **schwierig** für eine Klasse  $\mathcal{C}$  von Sprachen bezüglich Polynom-Zeit/log-Raum-Reduktion:
  - Jede Sprache in  $\mathcal{C}$  ist Polynom-Zeit/log-Raum-reduzierbar auf  $L$ .
- $L$  ist **vollständig** für  $\mathcal{C}$  bezüglich Polynom-Zeit/log-Raum-Reduktion:
  - $L \in \mathcal{C}$  und  $L$  ist schwierig für  $\mathcal{C}$  bezüglich P-Zeit/log-Raum-Reduktion.
- $L$  ist  **$\mathcal{NP}$ -vollständig ( $\mathcal{NP}$ -schwierig)**:
  - $L$  ist vollständig/schwierig für  $\mathcal{NP}$  bezüglich Polynom-Zeit-Reduktion.
- $L$  ist **PSPACE-vollständig (PSPACE-schwierig)**:
  - $L$  ist vollständig/schwierig für PSPACE bezüglich Pol.-Zeit-Reduktion.

Wäre ein einziges  $\mathcal{NP}$ -vollständiges Problem in polynomialer Zeit lösbar, wäre  $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ ; dies ist also höchst unwahrscheinlich.

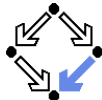
# Das Erfüllbarkeits-Problem



- Ein **Boolescher Ausdruck**  $E$ :
  - $x_1, x_2, \dots, T, F, \neg E_1, E_1 \wedge E_2, E_1 \vee E_2$ .
    - Für Boolesche Ausdrücke  $E_1, E_2$ .
- Ein Boolescher Ausdruck  $E$  ist **erfüllbar**:
  - Die Variablen in  $E$  können so durch die Konstanten  $T$  oder  $F$  ersetzt werden, dass  $E$  den Wert  $T$  erhält.
    - $(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee x_1)$  ist erfüllbar für  $x_1 := T, x_2 := F$ .
    - $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$  ist nicht erfüllbar.
- Das **Erfüllbarkeitsproblem**:  
*Ist der Boolesche Ausdruck  $E$  erfüllbar?*
- Die Sprache  **$L_{SAT}$**  des Erfüllbarkeitsproblems:
  - $L_{SAT} := \{\text{code}(E) \mid E \text{ ist erfüllbar}\}$ 
    - $\text{code}(E)$  ... der Text von  $E$ , wobei jede Variable  $x_i$  durch die Binärdarstellung von  $i$  ersetzt wurde.
- **Satz:**  $L_{SAT}$  ist  $\mathcal{NP}$ -vollständig.
  - Beweis (Cook, 1971): siehe Skriptum.

Das bekannteste  $\mathcal{NP}$ -vollständige Problem.

# Andere $\mathcal{NP}$ -vollständige Probleme



- Das **Erfüllbarkeitsproblem für konjunktive Normalformen (CNFs)**.
  - Boolesche Ausdrücke  $(\alpha_{11} \vee \alpha_{12} \vee \dots) \wedge (\alpha_{21} \vee \alpha_{22} \vee \dots) \vee \dots$ 
    - Jedes  $\alpha_{ij}$  eine Konstante, Variable oder negierte Variable.
  - Auch mit nur 3 Literalen pro Klausel.
- Das Problem der **Hamiltonschen Zyklen**.
- Das Problem der **linearen Programmierung**:

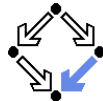
*Gibt es für ganzzahlige Matrix  $A$ , Vektoren  $c, d$  und Zahl  $B$  einen Vektor  $x$ , sodass  $A \cdot x \leq d$  und  $c \cdot x \geq B$ ?*
- Das **chromatische Zahlenproblem**:

*Kann Graph  $G$  mit  $k$  Farben so gefärbt werden, dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben?*
- Das **Problem des Handlungsreisenden**:

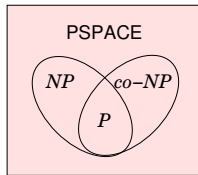
*Gibt es in gewichtetem Graphen  $G$  einen Hamiltonschen Zyklus mit Gewicht kleiner gleich  $k$ ?*
- Das **Partitionierungsproblem**:

*Gibt es zu einer Liste von ganzen Zahlen  $i_1, i_2, \dots, i_k$  eine Unterliste, deren Summe  $\frac{1}{2}(i_1 + i_2 + \dots + i_k)$  ist?*

# Die Komplexitätsklasse $\text{co-NP}$



- $\text{co-NP} := \{L \mid \bar{L} \in \text{NP}\}$ 
  - Die Klasse derjenigen Sprachen, deren Komplement in  $\text{NP}$  ist.
    - Diejenigen Eigenschaften, bei denen die Entscheidung der *Negation* der Eigenschaft nicht-deterministisch polynomiale Zeit benötigt.
- Frage:  $\text{co-NP} = \text{NP}$ ?
  - Antwort ist nicht bekannt.
  - Wenn nein, dann wäre  $\text{P} \neq \text{NP}$ .
    - Bekannt:  $\text{P} = \{L \mid \bar{L} \in \text{P}\}$
- **Satz:**  $\text{co-NP} \neq \text{NP}$  gilt genau dann wenn für alle  $\text{NP}$ -vollständige Probleme  $S$  gilt, dass  $\bar{S} \notin \text{NP}$ .
  - Für kein einziges  $\text{NP}$ -vollständiges Problem ist die Antwort bekannt.
    - Erfüllbarkeitsproblem: um die Nicht-Erfüllbarkeit eines Booleschen Ausdrucks zu entscheiden, scheint auch ein nicht-deterministischer Algorithmus mehr als polynomiale (exponentielle) Zeit zu benötigen.



Wenn  $\text{P} \neq \text{NP}$ , dann gibt es keinen nichtdeterministisch polynomialen Algorithmus zur Entscheidung der Nicht-Erfüllbarkeit.