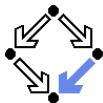


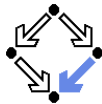
# Formale Grundlagen der Informatik 2

## Komplexität von Algorithmen

Wolfgang Schreiner  
Wolfgang.Schreiner@risc.uni-linz.ac.at

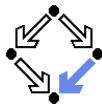
Research Institute for Symbolic Computation (RISC)  
Johannes Kepler University, Linz, Austria  
<http://www.risc.uni-linz.ac.at>





Wie wächst der Aufwand für die Ausführung eines Algorithmus mit wachsender Problemgröße?

- **Problemgröße:**
  - Eigenschaft der Eingabe, die ein Maß für den Aufwand darstellt.
- **Zeitkomplexität** eines Algorithmus:
  - Zeitaufwand als Funktion der Problemgröße.
  - Grenzverhalten: **asymptotische Zeitkomplexität.**
    - Problemgröße gegen unendlich.
- **Raumkomplexität** eines Algorithmus:
  - Speicheraufwand als Funktion der Problemgröße.
  - Grenzverhalten: **asymptotische Raumkomplexität.**
- **worst-case Komplexität:**
  - Maximale Komplexität für alle Eingaben der gegebenen Problemgröße.
- **erwartete Komplexität:**
  - Durchschnittliche Komplexität über alle Eingaben einer Problemgröße.



# Ordnung der Komplexitätsfunktion

Im allgemeinen ist man nur an der “Größenordnung” einer Komplexitätsfunktion interessiert.

- $g(n) = \mathcal{O}(f(n))$

“ $g(n)$  ist von der Ordnung  $f(n)$ ”

- $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

- $g$  ist eine Komplexitätsfunktion.

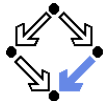
- $f$  beschreibt die “Größenordnung” von  $g$ .

- $g(n) = \mathcal{O}(f(n)) : \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : g(n) \leq c \cdot f(n)$

- Ab einer gewissen Eingabegröße  $N$  wächst  $f$  mindestens so schnell wie  $g$  (d.h. ergibt mit einer gewissen Konstante  $c$  multipliziert einen mindestens so großen Wert).

Additive und multiplikative Konstanten spielen bei der Ordnung einer Komplexitätsfunktion keine Rolle.

# Beispiel



■  $6n^2 + 7n = \mathcal{O}(n^2)$

■ Wir setzen  $c := 7$  und  $N := 7$ .

■ Es gilt für alle  $n \geq 7$ :

$$6n^2 + 7n \leq 6n^2 + n \cdot n = 6n^2 + n^2 = 7n^2$$

■  $\log_a n = \mathcal{O}(\log_b n)$  (für alle  $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ )

■ Wir setzen  $c := \log_a b$  und  $N := 0$ .

■ Es gilt für alle  $n \geq 0$ :

$$\log_a n = \log_a b \cdot \log_b n$$

■  $2^n + n^2 = \mathcal{O}(2^n)$

■ Wir setzen  $c := 2$  und  $N := 4$ .

■ Es gilt für alle  $n \geq 4$ :

$$2^n + n^2 \stackrel{(*)}{\leq} 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n$$

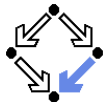
■ Lemma (\*):  $\forall n \geq 4 : n^2 \leq 2^n$ .

■ Induktionsbasis ( $n = 4$ ):  $4^2 = 16 = 2^4$ .

■ Induktionsschritt:  $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 2n + 2n = n^2 + 4n \leq$

$$n^2 + n \cdot n = n^2 + n^2 = 2n^2 \stackrel{\text{Ind.hyp.}}{\leq} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

# Bedeutung der Asymptotischen Komplexität



Macht die Entwicklung immer schnellerer Computer die Entwicklung asymptotisch schnellerer Algorithmen überflüssig?

- Verschiedene Algorithmen zur Lösung des gleichen Problems:

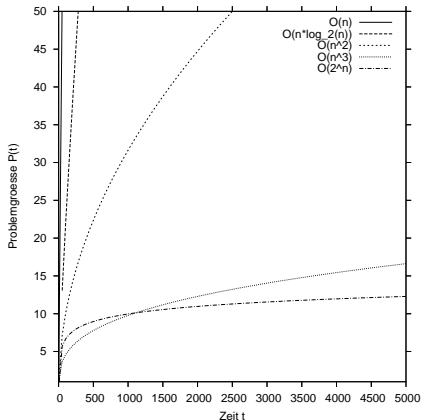
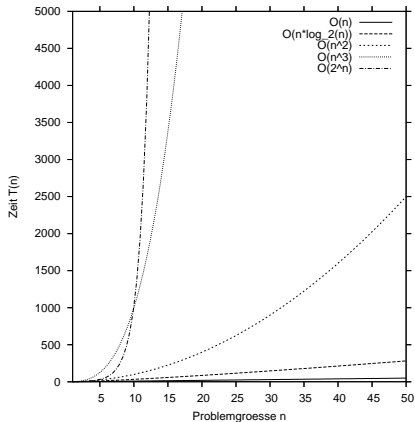
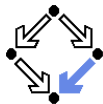
Algorithmus	Zeitkomplexität	Maximale Problemgröße $n$		
		1s	1m	1h
$A_1$	$\mathcal{O}(n)$	1.000	60.000	3.600.000
$A_2$	$\mathcal{O}(n \log n)$	140	4893	250.000
$A_3$	$\mathcal{O}(n^2)$	31	244	1897
$A_4$	$\mathcal{O}(n^3)$	10	39	153
$A_5$	$\mathcal{O}(2^n)$	9	15	21

- 10 mal schnellerer Computer kommt auf den Markt:

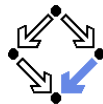
Algorithmus	Zeitkomplexität	Maximale Problemgröße $n$			Zunahme
		1s	1m	1h	
$A_1$	$\mathcal{O}(n)$	10.000	600.000	36.000.000	*10
$A_2$	$\mathcal{O}(n \log_2 n)$	1.003	39.311	1.736.782	*7 ( $\approx$ )
$A_3$	$\mathcal{O}(n^2)$	100	774	6000	*3.16 ( $\sqrt{10}$ )
$A_4$	$\mathcal{O}(n^3)$	21	84	330	*2.15 ( $\sqrt[3]{10}$ )
$A_5$	$\mathcal{O}(2^n)$	13	19	25	+3.3 ( $\log_2 10$ )

**Problemgröße wächst nur deutlich bei niedriger Laufzeitkomplexität!**

# Bedeutung der Asymptotischen Komplexität



# Multiplikation ganzer Zahlen

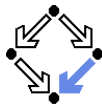


Wie schnell kann man zwei  $n$ -stellige Zahlen  $x$  und  $y$  multiplizieren?

- Klassischer Algorithmus:  $\mathcal{O}(n^2)$ .
  - $n$  Multiplikationen  $r_i \leftarrow x \cdot y_i$  der Komplexität  $\mathcal{O}(n)$ .
    - Jede Multiplikation besteht aus  $n$  Multiplikationen  $x_j \cdot y_i$ .
  - $n - 1$  Additionen  $r_1 + \dots + r_n$  der Komplexität  $\mathcal{O}(n)$ .
    - Jede Addition enthält maximal  $2n$  Additionen zweier Ziffern.
- Karatsuba und Ofman (1962):  $\mathcal{O}(n^{\log_2 3}) \approx \mathcal{O}(n^{1.59})$ 
  - Grundidee: “divide und conquer” Prinzip.
  - Führt die Multiplikation zweier  $n$ -stelliger Zahlen zurück auf drei Multiplikationen zweier  $n/2$ -stelliger Zahlen.

Verbesserung auch von klassischen Algorithmen möglich.

# Karatsuba-Algorithmus



Wir nehmen an, die Anzahl der Stellen  $n$  ist eine Potenz von 2.

Karatsuba( $\downarrow n$ ,  $\downarrow x$ ,  $\downarrow y$ ,  $\uparrow z$ ):

**if**  $n = 1$  **then**

$z \leftarrow x_1 \cdot y_1$

**else**

$a \leftarrow x_{1\dots n/2}$ ;  $b \leftarrow x_{n/2+1\dots n}$

$c \leftarrow y_{1\dots n/2}$ ;  $d \leftarrow y_{n/2+1\dots n}$

Karatsuba( $\downarrow n/2$ ,  $\downarrow a + b$ ,  $\downarrow c + d$ ,  $\uparrow u$ )

Karatsuba( $\downarrow n/2$ ,  $\downarrow a$ ,  $\downarrow c$ ,  $\uparrow v$ )

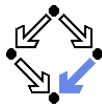
Karatsuba( $\downarrow n/2$ ,  $\downarrow b$ ,  $\downarrow d$ ,  $\uparrow w$ )

$z \leftarrow v \cdot \beta^n + (u - v - w) \cdot \beta^{n/2} + w$

**end** Karatsuba.

Nimmt an, dass die Additionen  $a + b$  und  $c + d$  keinen Übertrag zu  $n + 1$  Stellen ergeben (siehe Skriptum für die Behandlung auch dieses Falls).





# Analyse des Karatsuba-Algorithmus

- **Korrektheit:** sei  $\beta$  die Basis der Zahlendarstellung.

- $x = a \cdot \beta^{n/2} + b$

- $y = c \cdot \beta^{n/2} + d$

- $x \cdot y = (a \cdot \beta^{n/2} + b) \cdot (c \cdot \beta^{n/2} + d)$

$$= ac \cdot \beta^n + (ad + bc) \cdot \beta^{n/2} + bd$$

$$= ac \cdot \beta^n + ((a + b) \cdot (c + d) - ac - bd) \cdot \beta^{n/2} + bd$$

$$= v \cdot \beta^n + (u - v - w) \cdot \beta^{n/2} + w$$

- **Laufzeit:**

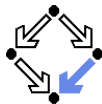
$$T(n) = \begin{cases} k, & \text{wenn } n = 1 \\ 3T(n/2) + kn & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

- $k$  konstanter Faktor.

- $k \dots$  Obergrenze für die Addition im "then"-Zweig.

- $kn \dots$  Obergrenze für Additionen/Verschiebungen im "else"-Zweig.

Lösung der Rekursionsrelation notwendig.



# Analyse des Karatsuba-Algorithmus

■ **Behauptung:**  $T(n) = 3kn^{\log_2 3} - 2kn$ .

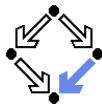
■ Induktionsbasis  $n = 1$ :

$$T(1) = k = 3k - 2k = 3k \cdot 1^{\log_2 3} - 2k \cdot 1.$$

■ Induktionsschritt  $n = 2\bar{n}$ :

$$\begin{aligned} T(2\bar{n}) &= 3T(\bar{n}) + 2k\bar{n} \\ &= 3(3k\bar{n}^{\log_2 3} - 2k\bar{n}) + 2k\bar{n} \\ &= 3k \cdot 3 \cdot \bar{n}^{\log_2 3} - 6k\bar{n} + 2k\bar{n} \\ &= 3k \cdot 2^{\log_2 3} \cdot \bar{n}^{\log_2 3} - 4k\bar{n} \\ &= 3k \cdot (2\bar{n})^{\log_2 3} - 2k \cdot (2\bar{n}). \end{aligned}$$

Für die Zeitkomplexität  $T(n)$  des Karatsuba-Algorithmus gilt also  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$ .



# Lösung linearer Rekursionsrelationen

Wie kommt man zur Lösung der Rekursionsrelation?

- **Satz:** seien  $a, b, n$  natürliche Zahlen. Die Lösung von

$$T(n) = \begin{cases} b, & \text{wenn } n = 1 \\ aT(n/c) + bn & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

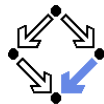
für eine Potenz  $n$  von  $c$  ist

$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n), & \text{wenn } a < c \\ \mathcal{O}(n \log_c n), & \text{wenn } a = c \\ \mathcal{O}(n^{\log_c a}), & \text{wenn } a > c \end{cases}$$

- Beweis: siehe Skriptum.

Nützlich für die Analyse von linearen “divide and conquer” Algorithmen.

# Lineare “divide and conquer”-Algorithmen



$$T(n) = \begin{cases} \mathcal{O}(n), & \text{wenn } a < c \\ \mathcal{O}(n \log_c n), & \text{wenn } a = c \\ \mathcal{O}(n^{\log_c a}), & \text{wenn } a > c \end{cases}$$

## ■ Lineare “divide und conquer”-Algorithmen:

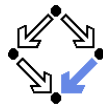
- Problem wird in  $a$  Teilprobleme zerlegt.
- Jedes Teilproblem hat Größe  $n/c$ .
- Aufwand für Zerlegung und Kombination der Teilergebnisse ist linear.

## ■ Beispiel $c = 2$ : Teile halber Größe.

- $a = 1$  Teil:  $T(n) = \mathcal{O}(n)$ .
- $a = 2$  Teile:  $T(n) = \mathcal{O}(n \log_2 n)$ .
- $a = 3$  Teile:  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$ .
- $a = 4$  Teile:  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 4}) = \mathcal{O}(n^2)$ .
- $a = 8$  Teile:  $T(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 8}) = \mathcal{O}(n^3)$ .

Die Anzahl der Teile geht in die Laufzeitkomplexität logarithmisch ein.

# Komplexität von RAM Programmen



Abhängig von den Kosten, die für die Ausführung einer Instruktion angenommen werden.

## ■ Uniformes Kostenkriterium:

- Jedes Register benötigt eine Raumeinheit.
- Jede Instruktion benötigt eine Zeiteinheit.

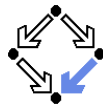
## ■ Logarithmisches Kostenkriterium:

- Anzahl der für ein Register benötigten Speicherzellen ist abhängig von der Länge  $l(n)$  des Inhalts  $n$  des Registers:

$$l(n) := \begin{cases} \lfloor \log |n| \rfloor + 1, & \text{wenn } n \neq 0 \\ 1, & \text{wenn } n = 0 \end{cases}$$

Das uniforme Kostenkriterium ist die Default-Annahme bei der Analyse der Komplexität von RAM-Programmen.

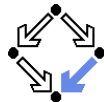
# Logarithmische Komplexität



Wir betrachten die Auswirkungen des logarithmischen Kostenkriteriums.

- **Logarithmische Raumkomplexität:**  $\sum l(x_i)$ 
  - Summe über alle verwendeten Register  $i$  (einschließlich Akkumulator).
  - $x_i$  ist dabei die betragsmäßig größte Zahl, die während der Berechnung je in Register  $i$  gespeichert wird.
- **Logarithmische Kosten** für Operanden:
  - Zeit  $t(a)$  für den Zugriff auf den Operanden  $a$ :
    - $t(=i) := l(i)$
    - $t(i) := l(i) + l(c(i))$
    - $t(*i) := l(i) + l(c(i)) + l(c(c(i)))$
- **Logarithmische Kosten** für Instruktionen:
  - Zeit für die Ausführung der Instruktion.
  - Annahme: Zeit ist proportional zur Länge des Operanden.

# Logarithmische Komplexität

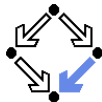


Die logarithmischen Kosten für jede RAM-Instruktion:

Instruktion	Kosten
LOAD $a$	$t(a)$
STORE $i$	$l(c(0)) + l(i)$
STORE $*i$	$l(c(0)) + l(i) + l(c(i))$
ADD $a$	$l(c(0)) + t(a)$
SUB $a$	$l(c(0)) + t(a)$
MULT $a$	$l(c(0)) + t(a)$
DIV $a$	$l(c(0)) + t(a)$
READ $i$	$l(input) + l(i)$
READ $*i$	$l(input) + l(i) + l(c(i))$
WRITE $a$	$t(a)$
JUMP $b$	1
JGTZ $b$	$l(c(0))$
JZERO $b$	$l(c(0))$
HALT	1

Auch Multiplikation und Division gelten als lineare Operationen (?!).

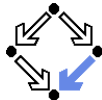
# Beispiel



RAM-Programm für die Funktion  $f(n) = \begin{cases} n^n, & \text{wenn } n > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

<b>read</b> $r_1$	READ	1	Eingabe von $c(1)$	
<b>if</b> $r_1 \leq 0$ <b>then</b>	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$	
<b>write</b> 0	JGTZ	else	wenn $c(0) > 0$ , else	
<b>else</b>	WRITE	=0	Ausgabe von 0	
$r_2 \leftarrow r_1$	JUMP	halt		
$r_3 \leftarrow r_1 - 1$	else:	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
<b>while</b> $r_3 > 0$ <b>do</b>	STORE	2	$c(2) \leftarrow c(0)$	
$r_2 \leftarrow r_2 \cdot r_1$	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$	
$r_3 \leftarrow r_3 - 1$	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$	
<b>write</b> $r_2$	STORE	3	$c(3) \leftarrow c(0)$	
	while:	LOAD	3	$c(0) \leftarrow c(3)$
	JGTZ	body	wenn $c(0) > 0$ , body	
	JUMP	done		
	body:	LOAD	2	$c(0) \leftarrow c(2)$
	MULT	1	$c(0) \leftarrow c(0) \cdot c(1)$	
	STORE	2	$c(2) \leftarrow c(0)$	
	LOAD	3	$c(0) \leftarrow c(3)$	
	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$	
	STORE	3	$c(3) \leftarrow c(0)$	
	JUMP	while		
	done:	WRITE	2	Ausgabe von $c(2)$
	halt:	HALT		





## ■ Zeitkomplexität:

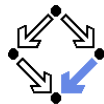
- Bestimmt durch die Zeitkomplexität der MULT-Instruktionen:
  - Schleife führt  $n - 1$  Iterationen aus.
  - In Iteration  $i$  enthält Akkumulator  $n^i$  und  $r_2$  enthält  $n$ .
- Uniformes Kostenkriterium:  $(n - 1) \cdot 1 = \mathcal{O}(n)$
- Logarithmisches Kostenkriterium:  $\mathcal{O}(n^2 \log n)$ 
  - $i$ -te MULT-Instruktion:  $l(n^i) + l(n) \approx i \cdot \log n + \log n = (i + 1) \log(n)$
  - Alle MULT-Instruktionen:  $\sum_{i=1}^{n-1} (i + 1) \log n = \mathcal{O}(n^2 \log n)$

## ■ Raumkomplexität:

- Inhalt der Register 0 bis 3.
- Uniformes Kostenkriterium:  $3 = \mathcal{O}(1)$
- Logarithmisches Kostenkriterium:  $\mathcal{O}(n \log n)$ 
  - $n^n$  ist die größte gespeicherte Zahl.
  - $l(n^n) \approx n \log n$

Das logarithmische Kostenkriterium ist realistischer, wenn die beteiligten Zahlen nicht mehr in eine einzelne Speicherzelle passen.

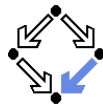
# Beispiel



RAM-Programm, das alle Wörter aus 1en und 2en akzeptiert, die aus gleich vielen 1en wie 2en bestehen.

$r_2 \leftarrow 0$	LOAD	=0	$c(0) = 0$
read $r_1$	STORE	2	$c(2) = c(0)$
while $r_1 \neq 0$ do	READ	1	Eingabe von $r_1$
if $r_1 \neq 1$	while: LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
then $r_2 \leftarrow r_2 - 1$	JZERO	done	wenn $c(0) = 0$ , done
else $r_2 \leftarrow r_2 + 1$	LOAD	1	$c(0) \leftarrow c(1)$
read $r_1$	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
if $r_2 = 0$ then write 1	JZERO	one	wenn $c(0) = 0$ , one
	LOAD	2	$c(0) \leftarrow c(2)$
	SUB	=1	$c(0) \leftarrow c(0) - 1$
	STORE	2	$c(2) = c(0)$
	JUMP	read	
	one: LOAD	2	$c(0) \leftarrow c(2)$
	ADD	=1	$c(0) \leftarrow c(0) + 1$
	STORE	2	$c(2) = c(0)$
	read: READ	1	Eingabe von $c(1)$
	JUMP	while	
	done: LOAD	2	$c(0) \leftarrow c(2)$
	JZERO	write	wenn $c(0) = 0$ , write
	HALT		
	write: WRITE	=1	Ausgabe von 1
	HALT		

# Beispiel

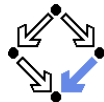


Wort aus  $n$  Zeichen wird gelesen.

- $n$  Iterationen.
- In jeder Iteration Addition von 1 zu einer Zahl kleiner  $n$ .
- Größte gespeicherter Zahl  $n$ .

	Uniforme Kosten	Logarithmische Kosten
Zeitkomplexität	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$
Raumkomplexität	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$

# Komplexität von RAM/RASP-Simulationen

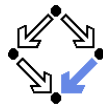


Die folgenden Sätze gelten sowohl für das uniforme als auch für das logarithmische Kostenkriterium.

- **Satz:** Für jedes RAM-Programm mit Zeitkomplexität  $T(n)$  gibt es eine Konstante  $k$  und ein äquivalentes RASP-Programm mit Zeitkomplexität  $kT(n)$ .
  - Beweis: das zum RAM-Programm  $P$  äquivalente RASP-Programm  $P'$  enthält für jede Instruktion von  $P$  maximal 6 Instruktionen. Unter dem uniformen Kostenkriterium ist die Zeitkomplexität von  $P'$  also  $6T(n)$ . Durch Analyse von  $P'$  kann man zeigen, dass für das logarithmische Kostenkriterium die Zeitkomplexität von  $P'$  gleich  $(6 + 11 \cdot l(r)) \cdot T(n)$  ist ( $r$  ist der bei der Simulation angenommene Verschiebungsfaktor).
- **Satz:** Für jedes RASP-Programm mit Zeitkomplexität  $T(n)$  gibt es eine Konstante  $k$  und ein äquivalentes RAM-Programm mit Zeitkomplexität  $kT(n)$ .

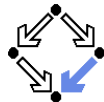
Die Simulation von RAM durch RASP und umgekehrt kostet nur einen konstanten Zeitfaktor.

# Komplexität von Turing-Maschinen



- Die **(worst-case) Zeitkomplexität  $T(n)$**  einer Turing-Maschine  $M$ :
  - $T(n)$  ist die maximale Anzahl der Übergänge zu einer neuen Konfiguration bei einer Berechnung, die mit einem beliebigen Eingabewort der Länge  $n$  beginnt.
    - Terminiert die Berechnung für ein Eingabewort der Länge  $n$  nicht, ist  $T(n)$  undefiniert.
- Die **(worst-case) Raumkomplexität  $S(n)$**  einer Turing-Maschine  $M$ :
  - $S(n)$  ist die maximale Distanz, die sich einer der L/S-Köpfe während einer Berechnung, die mit einem beliebiges Eingabewort der Länge  $n$  beginnt, vom linken Bandende entfernt.
    - Gibt es ein Eingabewort der Länge  $n$ , für das sich der L/S-Kopf unbegrenzt nach rechts bewegt, ist  $S(n)$  undefiniert.
- Die **Zeit/Raumkomplexität einer nicht-deterministischen T.-M.  $M$** :
  - Die maximale Zeit/Raumkomplexität, die  $M$  für eine Eingabe der Länge  $n$  (für eine beliebige Folge von nichtdeterministischen Wahlen) erreichen kann.

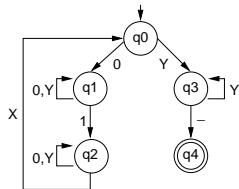
# Beispiel



$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$  zur Erkennung der Wörter  $0^m 1^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ).

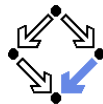
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ,  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $\Gamma = \{\sqcup, 0, 1, X, Y\}$ ,  $F = \{q_4\}$

$\delta$	$\sqcup$	0	1	X	Y
$q_0$	—	$(q_1, X, R)$	—	—	$(q_3, Y, R)$
$q_1$	—	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, Y, L)$	—	$(q_1, Y, R)$
$q_2$	—	$(q_2, 0, L)$	—	$(q_0, X, R)$	$(q_2, Y, L)$
$q_3$	$(q_4, \sqcup, R)$	—	—	—	$(q_3, Y, R)$
$q_4$	—	—	—	—	—



- $T(n) = \mathcal{O}(n^2)$  (für Eingabewort  $w$  der Länge  $n$ ):
  - Hauptschleife wird höchstens  $(n+1)/2$  mal durchlaufen.
    - Ersetzt in jedem Durchlauf zwei Symbole von  $w$  durch  $X$  und  $Y$ .
  - Jeder Schleifendurchlauf:  $2n+2$  Schritte.
    - $n+1$  Schritte für die Suche nach rechts,  $n$  Schritte für die Suche nach links, 1 Schritt für die Bewegung zum nächsten Symbol.
  - Schlussbehandlung:  $n$  Schritte.
  - In Summe  $(2n+2) \cdot (n+1)/2 + n = (n+1)^2 + n$  Schritte.
- $S(n) = \mathcal{O}(n)$ :
  - $L/S$ -Kopf bewegt sich höchstens über eine Position von  $w$  hinaus.

# Komplexität von RAM/RASP-Simulationen



- Zwei Funktionen  $f_1, f_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sind in **polynomialer Relation**:
  - Es gibt Polynome  $p_1(x)$  und  $p_2(x)$  mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

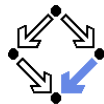
$$f_1(n) \leq p_1(f_2(n)) \text{ und } f_2(n) \leq p_2(f_1(n))$$

- Beispiele:

- $2n^2$  und  $n^5$  sind in polynomialer Relation.
  - $p_1(x) = 2x, p_2(x) = x^3$ .
  - $2n^2 \leq 2n^5$  und  $n^5 \leq (2n^2)^3$
- $a^n$  und  $b^n$  sind in polynomialer Relation (für  $a, b > 1$ ):
  - $p(x) = x^{\lceil \log_b a \rceil}$ .
  - $a^n = (b^{\log_b a})^n = (b^n)^{\log_b a} \leq p(b(n))$
- $n^2$  und  $2^n$  sind nicht in polynomialer Relation:
  - Es gibt kein Polynom  $p(x)$  sodass  $p(n^2) \geq 2^n$ , für alle  $n$ .

**Kriterium, dass sich zwei Funktionen nicht mehr als um eine "polynomiale Transformation" voneinander unterscheiden.**

# Komplexität von RAM/RASP-Simulationen



- **Satz:** Das RAM/RASP Modell unter dem logarithmischen Kostenkriterium und das Turing-Maschinen-Modell sind in polnomialer Relation.
  - Zu jeder RAM/RASP  $R$  gibt es eine Turing-Maschine  $M$ , sodass die Komplexitätsfunktionen von  $R$  und  $M$  in polynomialer Relation stehen, und umgekehrt.
- Uniformes Kostenkriterium: jede Turing-Maschine mit Komplexität  $\mathcal{O}(T(n))$  wird durch RAM mit Komplexität  $\mathcal{O}(T^2(n))$  simuliert.
  - Umgekehrung gilt nicht: RAM kann durch iteratives Quadrieren in  $\mathcal{O}(n)$  Schritten die Zahl  $2^{2^n}$  berechnen ( $2^{2^n} = (2^{2^{n-1}})^2$ ).
  - Turing-Maschine braucht  $2^n$  Zellen, nur um diese Zahl zu speichern.
    - RAM benötigt dafür nur 1 Register.

Unter dem logarithmischen Kostenkriterium unterscheidet sich die Komplexität von RAM und Turing-Maschine "nicht essentiell".