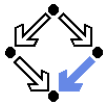
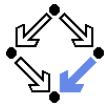
Formale Grundlagen der Informatik 2
Turing-Maschinen

Wolfgang Schreiner
Wolfgang.Schreiner@risc.uni-linz.ac.at

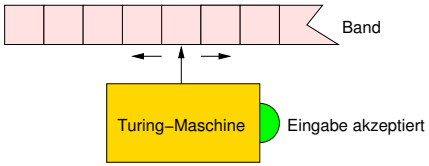
Research Institute for Symbolic Computation (RISC)
Johannes Kepler University, Linz, Austria
http://www.risc.uni-linz.ac.at



Turing-Maschine

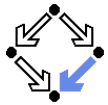


Alan M. Turing, 1937: *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem.*



- Eine Kontrolleinheit mit einer endlichen Anzahl von Zuständen.
  - Ein Anfangszustand, eine Menge von Endzuständen.
- Ein in einer Richtung unendlich langes Band.
  - In jedem Schritt liest der Automat das Symbol in der aktuellen Zelle,
  - bestimmt daraus (und aus seinem Zustand) seinen neuen Zustand,
  - schreibt ein neues Symbol in die aktuelle Zelle und
  - bewegt (optional) den Lese/Schreib-Kopf nach links oder nach rechts.
  - Berechnung endet, wenn kein neuer Zustand bestimmt werden kann.
    - Maschine ist in einem Endzustand: die Eingabe wurde akzeptiert.

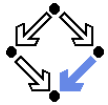
Beispiel



Turing-Maschine M_1, die alle Wörter der Form 0^n1^n ($n \in \mathbb{N}$) akzeptiert.

- Am Anfang steht das Wort in den ersten Zellen des Bandes.
  - Gefolgt von einer unendlichen Anzahl von "Leersymbolen" $\sqcup$.
- M_1 führt wiederholt folgende Schritte durch:
  - M_1 ersetzt die am weitesten links stehende 0 durch X.
  - M_1 bewegt den L/S-Kopf nach rechts bis zur ersten 1.
  - M_1 ersetzt die 1 durch Y.
  - M_1 bewegt den L/S-Kopf nach links bis zum ersten X und dann um eins nach rechts (zur jetzt am weitesten links stehenden 0).
- Findet M_1 bei der Suche nach einer 1 stattdessen ein $\sqcup$:
  - M_1 stoppt, die Eingabe wurde nicht akzeptiert.
- Kann M_1 keine weitere 0 mehr ersetzen:
  - M_1 überprüft, ob noch 1en vorhanden sind.
  - Wenn ja, stoppt M_1 und die Eingabe wurde nicht akzeptiert.
  - Wenn nein, stoppt M_1 und die Eingabe wurde akzeptiert.

Turing-Maschine



- Turing-Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$
  - Q ... eine endliche Menge von Zuständen.
  - Σ ... eine endliche Menge von Symbolen (das Eingabealphabet).
  - Γ ... eine endliche Menge von Symbolen (das Bandalphabet).
    - $\Sigma \subset \Gamma, \sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$
    - $\sqcup$ ... das "Leersymbol".
  - $q_0 \in Q$ ... der Startzustand.
  - $F \subseteq Q$ ... die Menge der Endzustände.
  - $\delta : Q \times \Gamma \xrightarrow{\text{partiell}} Q \times \Gamma \times \{L, R, S\}$
    - $\delta(q, s) = (q', s', r)$ ... der Automat liest im Zustand q das Symbol s, geht in den Zustand q' über, schreibt das Symbol s' und bewegt den Lese/Schreib-Kopf in die durch r angezeigte Richtung.
      - $r = L$ ... L/S-Kopf wird um eine Position nach links bewegt.
      - $r = R$ ... L/S-Kopf wird um eine Position nach rechts bewegt.
      - $r = S$ ... L/S-Kopf bleibt stationär (bewegt sich nicht).

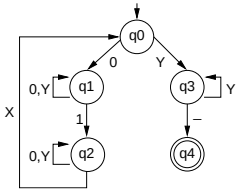
Die Kontrolle über das Band und seine Beschreibbarkeit machen den wesentlichen Unterschied zu einem endlichen Automaten aus.

Beispiel

$M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{\sqcup, 0, 1, X, Y\}$, $F = \{q_4\}$

δ	$\sqcup$	0	1	X	Y
q_0	–	(q_1, X, R)	–	–	(q_3, Y, R)
q_1	–	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)	–	(q_1, Y, R)
q_2	–	$(q_2, 0, L)$	–	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)
q_3	$(q_4, \sqcup, R)$	–	–	–	(q_3, Y, R)
q_4	–	–	–	–	–



- q_0 ... Startzustand, ersetze 0 durch X bzw. starte Suche nach $\sqcup$.
- q_1 ... Gehe nach rechts bis zur ersten 1 und ersetze es durch Y.
- q_2 ... Gehe nach links bis zum ersten X, dann eins nach rechts.
- q_3 ... Alle 0en ersetzt, gehe nach rechts auf der Suche nach $\sqcup$.
- q_4 ... $\sqcup$ gefunden, Endzustand.

Konfigurationen der Turing-Maschine

Sei M eine Turing-Maschine.

- Eine Konfiguration $\alpha_1 \ldots \alpha_k q \alpha_{k+1} \ldots \alpha_m$ von M:
  - Bandymbole $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ links vom L/S-Kopf.
  - Aktueller Zustand q.
  - Bandsymbole $\alpha_{k+1} \ldots \alpha_m$ unter dem bzw. rechts vom L/S-Kopf.
    - α_{k+1} ... aktuelles Bandsymbol.
    - Rechts von α_m ausschließlich Leersymbole $\sqcup$.

  (eine Beschreibung der aktuellen Situation von M).
- $\alpha_1 \ldots \alpha_k q \alpha_{k+1} \ldots \alpha_m \vdash \beta_1 \ldots \beta_l p \beta_{l+1} \ldots \beta_m$:
  - $\alpha_i = \beta_i$ für alle $i \neq k+1$ und
    - $l = k$ und $\delta(q, \alpha_{k+1}) = (p, \beta_{l+1}, S)$, oder
    - $l = k+1$ und $\delta(q, \alpha_{k+1}) = (p, \beta_l, R)$, oder
    - $l = k-1$ und $\delta(q, \alpha_{k+1}) = (p, \beta_{l+2}, L)$.

  ($\alpha_1 \ldots \alpha_k q \alpha_{k+1} \ldots \alpha_m$ *geht in* $\beta_1 \ldots \beta_l p \beta_{l+1} \ldots \beta_m$ *über*).

Die Sprache einer Turingmaschine

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$ eine Turing-Maschine.

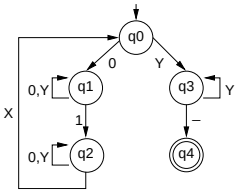
- Eine Berechnung von M:
  - Eine Folge von Konfigurationen $C_0, C_1, \ldots$
    - $C_0 = q_0 x$ für ein Eingabewort $x \in \Sigma^*$.
    - $C_0 \vdash C_1$, $C_1 \vdash C_2$, ...
  - Die Berechnung endet in einer Konfiguration C_n, wenn keine mögliche Konfiguration D existiert, sodass $C_n \vdash D$.
    - Ansonsten ist die Berechnung unendlich lang.
- M akzeptiert ein Eingabewort $x \in \Sigma^*$:
  - Die von der Konfiguration $q_0 x$ ausgehende Berechnung endet in einer Konfiguration $\alpha_1 \ldots \alpha_k q \alpha_{k+1} \ldots \alpha_m$ mit $q \in F$.
- Die von M akzeptierte Sprache $L(M) := \{x \mid M \text{ akzeptiert } x\}$.
  - Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt rekursiv aufzählbar, wenn es eine Turing-Maschine M gibt, sodass $L(M) = L$.
  - Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt rekursiv, wenn es eine Turing-Maschine M mit $L(M) = L$ gibt, sodass jede Berechnung von M endet.

Beispiel

Eingabe 0011 für Turing-Maschine $M_1 = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$.

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{0,1\}$, $\Gamma = \{\sqcup, 0, 1, X, Y\}$, $F = \{q_4\}$

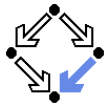
δ	$\sqcup$	0	1	X	Y
q_0	–	(q_1, X, R)	–	–	(q_3, Y, R)
q_1	–	$(q_1, 0, R)$	(q_2, Y, L)	–	(q_1, Y, R)
q_2	–	$(q_2, 0, L)$	–	(q_0, X, R)	(q_2, Y, L)
q_3	$(q_4, \sqcup, R)$	–	–	–	(q_3, Y, R)
q_4	–	–	–	–	–



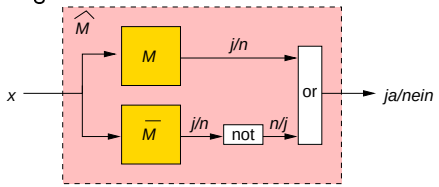
$q_0 0011 \vdash X q_1 011 \vdash X 0 q_1 11 \vdash X q_2 0 Y 1$
$\vdash q_2 X 0 Y 1 \vdash X q_0 0 Y 1 \vdash X X q_1 Y 1 \vdash X X Y q_1 1$
$\vdash X X q_2 Y Y \vdash X q_2 X Y Y \vdash X X q_0 Y Y \vdash X X Y q_3 Y$
$\vdash X X Y Y q_3 \vdash X X Y Y \sqcup q_4$

Das Wort 0011 wird von M_1 akzeptiert.

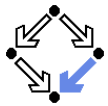
Rekursive Sprachen



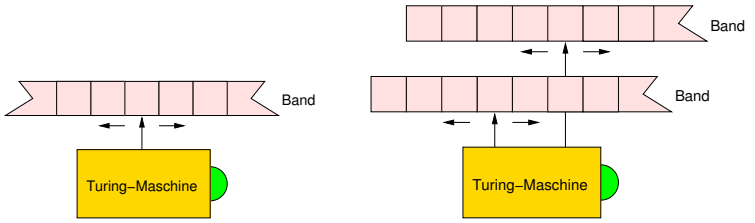
- Satz: Die rekursiven Sprachen sind genau diejenigen Sprachen L, für die sowohl L als auch das Komplement $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar sind.
- Beweis von $\Rightarrow$:
  - Sei L rekursiv und M eine Turing-Maschine, die L akzeptiert und deren Berechnungen immer mit "ja/nein" enden. Invertiert man die Antwort von M, erhält man eine Turing-Maschine $\overline{M}$, die $\overline{L}$ akzeptiert.
- Beweis von $\Leftarrow$:
  - Seien L und $\overline{L}$ rekursiv aufzählbar und M und $\overline{M}$ Maschinen, die L und $\overline{L}$ akzeptieren (deren Berechnungen also für Wörter aus diesen Sprachen mit "ja" enden und sonst möglicherweise nicht enden).
  - Man kann eine Turingmaschine $\widehat{M}$ konstruieren, die die folgende "parallele" Zusammenschaltung von M und $\overline{M}$ simuliert:



Varianten von Turing-Maschinen



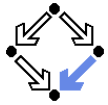
Verschiedenste Variationen sind möglich.



- In beide Richtungen unendliches Band.
  - Simulation durch Maschine mit einseitig unendlichem Band möglich.
- Mehrere Bänder.
  - In jedem Schritt können alle LS-Köpfe unabhängig voneinander schreiben und bewegt werden.
  - Simulation durch Maschine mit nur einem Band möglich.

Die Mächtigkeit des Konzepts wird dadurch nicht vergrößert.

Nichtdeterministische Turing-Maschinen

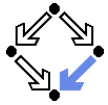


Mehr als eine mögliche Nachfolger-Konfiguration.

- Nichtdeterministische Turing-Maschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$
  - ...
  - $\delta : Q \times \Gamma \to \mathcal{P}(Q \times \Gamma \times \{L, R, S\})$
    - $(q', s', r) \in \delta(q, s)$ ... der Automat kann im Zustand q das Symbol s lesen, in den Zustand q' übergehen, das Symbol s' schreiben und den Lese/Schreib-Kopf in die durch r angezeigte Richtung bewegen.

Erweiterung analog zu den nichtdeterministischen endlichen Automaten.

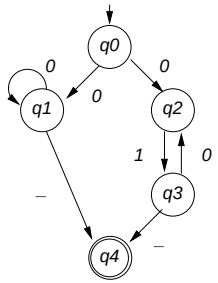
Beispiel



$L = \{0^n \mid n \geq 1\} \cup \{(01)^n \mid n \geq 1\}$

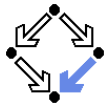
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F, \delta)$
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Sigma = (0,1), \Gamma = \{\sqcup, 0, 1\}, F = \{q_4\}$

δ	$\sqcup$	0	1
q_0	–	$\{(q_1, 0, R), (q_2, 0, R)\}$	–
q_1	$\{(q_4, \sqcup, R)\}$	$\{(q_1, 0, R)\}$	–
q_2	–	–	$\{(q_3, 1, R)\}$
q_3	$\{(q_4, \sqcup, R)\}$	$\{(q_2, 0, R)\}$	–
q_4	–	–	–



Die nichtdeterministische Turing-Maschine M akzeptiert L.

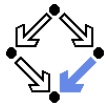
Nichtdeterministische Turing-Maschinen



- Satz: Zu jeder nichtdeterministischen Turing-Maschine M gibt es eine deterministische Turing-Maschine M' sodass $L(M) = L(M')$.
- Beweis: Sei r die größte Anzahl der Wahlmöglichkeiten von M für jedes Paar (q, x) von Zustand q und Bandsymbol x.
  - Jede Wahlmöglichkeit ist repräsentiert durch eine Zahl $1 \dots r$.
    - Jede Folge von Wahlen in einer Berechnung von M' ist repräsentiert durch eine endliche Folge der Zahlen $1 \dots r$.
  - Deterministische Turing-Maschine M' mit 3 Bändern:
    - Band 1 ist das ursprüngliche Eingabeband (wird nur gelesen).
    - Auf Band 2 werden alle endlichen Folgen aus $1 \dots r$ erzeugt. Zuerst alle Folgen der Länge 1, dann alle der Länge 2, etc.
    - Nach Erzeugen der ersten Folge auf Band 2 wird Band 1 auf 3 kopiert.
  - Jetzt wird die Ausführung von M auf Band 3 simuliert. Jede nichtdeterministische Auswahl wird durch den Inhalt von Band 2 bestimmt. Führt die Simulation zu einem akzeptierenden Endzustand, beendet M seine Berechnung; ansonsten wird die nächste Folge auf Band 2 erzeugt.

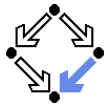
Auch Nichtdeterminismus vergrößert die Mächtigkeit des Konzepts nicht.

Die Erzeugung von Sprachen



- Die von M erzeugte (generierte) Sprache $G(M)$:
  - M sei eine Turing-Maschine, die ihr Band nur zur Ausgabe benutzt.
    - M schreibt nur und bewegt L/S-Kopf niemals nach links.
    - Ausgezeichnetes Bandsymbol #.
  - $G(M)$ ist die Menge aller Wörter, die M jeweils zwischen zwei Vorkommen von # auf das Ausgabeband schreibt.
- Satz: Eine Sprache ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn sie von einer Turing-Maschine erzeugt werden kann.
  - Beweis $\Rightarrow$: Sei M so dass $L = L(M)$. Wir konstruieren M' zur Erzeugung von L. M' konstruiert alle Paare von positiven ganzen Zahlen. Nach Konstruktion eines Paars (i, j) konstruiert M' das i-te Wort $x_i \in \Sigma^*$ und simuliert maximal j Schritte der Berechnung von M mit Eingabe x_i. Wird dabei x_i akzeptiert, schreibt M' das Wort x_i hinaus. Also gilt $L = G(M')$.
  - Beweis $\Leftarrow$: Sei M so dass $L = G(M)$. Wir konstruieren M' zur Erkennung von L mit einem zusätzlichen Band, auf dem M' die Berechnung von M simuliert: immer, wenn darauf ein neues Wort geschrieben wird, vergleicht es M' mit dem Eingabewort. Stimmen Sie überein, akzeptiert M' das Wort. Also gilt $L = L(M')$.

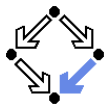
Die Berechnung von Funktionen



Seine Σ_1 und Σ_2 zwei Alphabete.

- Eine Turing-Maschine M berechnet eine partielle Funktion
  $$f : (\Sigma_1^*)^k \xrightarrow{\text{partiell}} \Sigma_2^*$$
  wenn folgendes gilt:
  - $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ist eine Teilmenge des Bandalphabets von M.
  - Für jedes Tupel von Wörtern $(x_1, \dots, x_k) \in (\Sigma_1^*)^k$ mit
    $$f(x_1, \dots, x_k) = y$$
    endet die mit der Eingabe (Bandinhalt) $x_1 \sqcup \dots \sqcup x_k$ begonnene Berechnung von M mit der Ausgabe (dem Bandinhalt) y.
  - Ist $f(x_1, \dots, x_k)$ undefiniert, dann terminiert die mit der Eingabe $x_1 \sqcup \dots \sqcup x_k$ begonnene Berechnung von M nicht.
- Eine (partielle) Funktion ist Turing-berechenbar, wenn es eine Turing-Maschine gibt, die die Funktion berechnet.
  - Satz: $f : (\Sigma_1^*)^k \xrightarrow{\text{partiell}} \Sigma_2^*$ ist genau dann Turing-berechenbar, wenn $L_f = \{(x_1, \dots, x_k, y) \mid f(x_1, \dots, x_k) = y\}$ rekursiv aufzählbar ist.

Beispiel



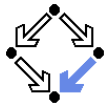
Berechnung von $x \dot{-} y := \begin{cases} x - y, & \text{wenn } x \geq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Eingabe 5, 3:	0	0	0	0	0	⊔	0	0	0	⊔
Ausgabe 2:	⊔	⊔	⊔	0	0	⊔	⊔	⊔	⊔	⊔

- Für jedes Vorkommen einer 0 in der Codierung von y:
  - Überschreibe das Vorkommen durch ⊔.
  - Überschreibe ein führendes Vorkommen von 0 in x durch ⊔.
    - Sofern ein solches Vorkommen noch existiert.

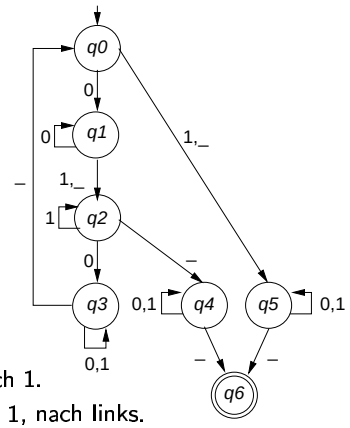
Turing-Maschinen-Berechnung der Negation auf $\mathbb{N}$.

Beispiel



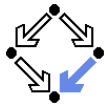
$M_2 = (Q, \Sigma, \Gamma, F, \delta)$
$Q = \{q_0, \ldots, q_6\}, \Sigma = \{0\}, \Gamma = \{0, 1, \sqcup\}, F = \{\}$

δ	0	1	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \sqcup, R)$	$(q_5, \sqcup, R)$	$(q_5, \sqcup, R)$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	$(q_2, 1, R)$
q_2	$(q_3, 1, L)$	$(q_2, 1, R)$	$(q_4, \sqcup, L)$
q_3	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(q_0, \sqcup, R)$
q_4	$(q_4, 0, L)$	$(q_4, \sqcup, L)$	$(q_6, 0, R)$
q_5	$(q_5, \sqcup, R)$	$(q_5, \sqcup, R)$	$(q_6, \sqcup, R)$
q_6	–	–	–



- q_0: Startzustand, ersetze führende 0 durch $\sqcup$.
- q_1: Suche nach nächstem $\sqcup$ und ersetze es durch 1.
- q_2: Suche nach nächster 0 und ersetze es durch 1, nach links.
- q_3: Suche nach vorigem $\sqcup$, nach rechts, beginne von vorne.
- q_4: $\sqcup$ statt 0 gefunden, ersetze alle vorigen 1 durch $\sqcup$.
- q_5: x ist 0, lösche Rest des Bandes.
- q_6: Endzustand.

Beispiel



- Berechnung von $2 \dot{-} 1$:

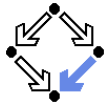
  $q_0 00 \sqcup 0 \vdash \sqcup q_1 0 \sqcup 0 \vdash \sqcup 0 q_1 \sqcup 0 \vdash \sqcup 01 q_2 0$
  $\vdash \sqcup 0 q_3 11 \vdash \sqcup q_3 011 \vdash q_3 \sqcup 011 \vdash \sqcup q_0 011$
  $\vdash \sqcup \sqcup q_1 11 \vdash \sqcup \sqcup 1 q_2 1 \vdash \sqcup \sqcup 11 q_2 \vdash \sqcup \sqcup 1 q_4 1$
  $\vdash \sqcup \sqcup q_4 1 \vdash \sqcup q_4 \vdash \sqcup 0 q_6$.

- Berechnung von $1 \dot{-} 2$:

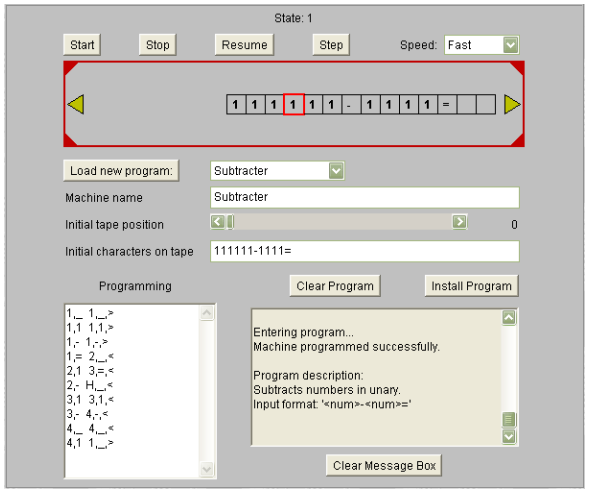
  $q_0 0 \sqcup 00 \vdash \sqcup q_1 \sqcup 00 \vdash \sqcup 1 q_2 00 \vdash \sqcup q_3 110$
  $\vdash q_3 \sqcup 110 \vdash \sqcup q_0 110 \vdash \sqcup \sqcup q_5 10 \vdash \sqcup \sqcup \sqcup q_5 0$
  $\vdash \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup q_5 \vdash \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup \sqcup q_6$.

Ebenso sind alle üblichen arithmetischen Funktionen Turing-berechenbar.

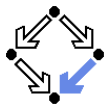
Simulator für Turing-Maschinen



Zum Beispiel auf `http://ironphoenix.org/tril/tm`



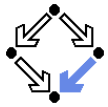
Turing-Maschinen und RAMs



- Satz: jede Turing-Maschine kann durch eine RAM simuliert werden.
- Beweis: Wir simulieren eine Turing-Maschine M durch eine RAM R.
  - R verwendet c Register $0 \ldots c-1$ für eigene Zwecke, speichert in Zelle c die Position des L/S-Kopfes von M und in den Registern $c+1, c+2, \ldots$ die Zellen $1, 2, \ldots$ des Bands von M ab. Die aktuelle Bandzelle von M kann von R über Register c durch indirekte Adressierung gelesen werden.

Jede Sprache bzw. Funktion die von einer Turing-Maschine akzeptiert bzw. berechnet werden kann, kann auch von einer RAM akzeptiert bzw. berechnet werden.

Turing-Maschinen und RAMs



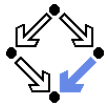
- Satz: Jede RAM kann durch eine Turing-Maschine simuliert werden.
- Beweis: Wir simulieren eine RAM R durch eine Turing-Maschine M mit 5 Bändern $B_1, \ldots, B_5$.
  - B_1 ist das Eingabeband.
  - B_2 ist das Ausgabeband.
  - B_3 dient zur Darstellung des Speichers von R:

#	#	#	i_1	#	c_1	#	#	i_2	#	c_2	⋯	#	#	i_k	#	c_k	#	#	⊔	⋯

    - $(i_1, \ldots, i_k)$ ... die Indizes aller Register von R, die nicht 0 enthalten.
    - $(c_1, \ldots, c_k)$ ... die entsprechenden Speicherinhalte $c(i_1), \ldots, c(i_k)$.
      Indizes und Speicherinhalte in Binärdarstellung.
  - B_4 speichert den Inhalt des Akkumulators (in Binärdarstellung).
  - B_5 dient als Arbeitsband.

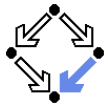
Jeder Rechenschritt von R wird durch eine endliche Folge von Zuständen von M simuliert.

Turing-Maschinen und RAMs



- Simulation von `ADD *i`:
  - Suche auf B_3 nach der Markierung i.
    - Folge $\#\#i'\#$ mit Binärdarstellung i' von i.
    - Ist Markierung nicht vorhanden, beende die Berechnung.
    - Ansonsten kopiere die der Markierung folgende Zahl auf B_5.
  - Suche auf B_3 nach der Markierung, dessen Nummer auf B_5 steht.
    - Ist Eintrag nicht vorhanden, schreibe 0 auf B_5.
    - Ansonsten kopiere die der Markierung folgende Zahl auf B_5.
  - Addiere die Zahl auf B_5 zum Inhalt von B_4 (dem Akkumulator).
- Simulation von `STORE i`:
  - Suche auf B_3 nach der Markierung i.
  - Ist Markierung vorhanden:
    - Kopiere den der folgenden Zahl nachfolgenden Bandinhalt auf B_5.
    - Schreibe auf B_3 nach der Markierung den Inhalt von B_4.
    - Schreibe auf B_3 danach den Bandinhalt von B_5.
  - Ist Eintrag nicht vorhanden:
    - Schreibe $i'\#$ auf B_3 unmittelbar nach dem letzten von ⊔ verschiedenen Symbol, anschließend den Inhalt von B_4, danach $\#\#$.

Turing-Maschinen und Algorithmen



- Church'sche These (Alonzo Church):
  Eine Funktion ist genau dann berechenbar, wenn sie Turing-berechenbar ist.
  - Nicht beweisbar.
    - "Berechenbarkeit" ist nur ein intuitiver Begriff.
  - Sehr glaubhaft.
    - Viele verschiedene Berechnungsmodelle wurden entworfen.
    - Keines von ihnen ist mächtiger als die Turing-Maschine.
- Ein Algorithmus ist eine Turing-Maschine, deren Berechnungen für alle möglichen Eingaben enden.
  - Alle Elemente der Ein-/Ausgabemengen müssen sich als Wörter über einem Alphabet schreiben lassen.
  - Dies trifft insbesondere auf die natürlichen Zahlen zu.
    - Natürliche Zahlen lassen sich als Folgen von Ziffern schreiben.
  - Damit umschließt der Begriff (aber beschränkt sich nicht auf) die Berechnung zahlentheoretischer Funktionen.