Übungsblatt 8

Besprechung am **14/12/2023**

Aufgabe 58. Zeigen Sie, dass $0.9999\ldots = 1$ gilt. Hinweis: Definieren Sie eine Folge $a_n = 0.9, 0.99, 0.999, \ldots$ und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 59. Zeigen Sie: Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ gilt, dann folgt $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0$.

Aufgabe 60. Zeigen Sie: Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $a_n > 0$ gelten, dann folgt $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = \infty$.

Aufgabe 61. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ gilt indem Sie ein explizites $n(T)$ finden, so dass für alle $n \geqslant n(T)$ die Ungleichung $\sqrt{n} \geqslant T$ folgt.

Aufgabe 62. Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Aufgabe 63. Zeigen Sie:

a) Wenn $a_1 \leqslant b_1$ und $a_{n+1} - a_n \leqslant b_{n+1} - b_n$ gelten für $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geqslant 1$, dann folgt $a_n \leqslant b_n$ für $n \in \mathbb{N}$, mit $n \geqslant 1$. Hinweis: Nutzen Sie Induktion.

b) $\sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ ist divergent.

Aufgabe 64. Zeigen Sie, dass

a) $2x^3 - 4x - 1$ mindestens drei Nullstellen in $[-2, 2]$ hat;

b) $\sin(x) + \cos(2x) - \frac{1}{2}$ mindestens zwei Nullstellen in $[0, \pi]$ hat;

c) $x\sin(x) - 2x^2 + 1$ mindestens zwei Nullstellen in $[-1, 1]$ hat.

Aufgabe 65. Zeigen Sie, dass:

a) $\sum_{k=1}^{\infty}(1 + 1/k)a^k$ konvergent ist für $|a| < 1$;

b) $\sum_{k=1}^{\infty}(3 + \sin(k) + \sin(2k))3^k$ divergent ist. Hinweis: Nutzen Sie Satz 5.5;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{k}$ konvergent ist. Hinweis: Nutzen Sie, das $|\sin(x)| \leqslant |x|$ gilt.

Aufgabe 66. a) Zeigen Sie mit Hilfe von Induktion dass

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(g_{k+1} - g_k) = f_n g_{n+1} - f_1 g_1 - \sum_{k=2}^{n} g_k(f_k - f_{k-1})$$

gilt.

b) Sei

$$g_k := \frac{1}{2}\frac{\sin(1)\cos(k)}{\cos(1)-1} - \frac{1}{2}\sin(k).$$

Zeigen Sie, dass $g_{k+1} - g_k = \sin(k)$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=2}^{\infty} \sin(k)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right)$ konvergent ist.

d) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k)}{k}$ konvergent ist.