Übungsblatt 7

Besprechung am **07/12/2023**

Aufgabe 49. Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dann folgt $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|$. Hinweis: Nutzen Sie $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Aufgabe 50. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent.

a) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - a_k$ konvergent ist. Hinweis: Nutzen Sie Satz 5.8.

b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k - |a_k|$ konvergent ist. Hinweis: Nutzen Sie a) und Satz 3.10.2.

c) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent ist. Hinweis: Nutzen Sie b) und Satz 3.10.1.

d) Zeigen Sie, dass $|\sum_{k=1}^{n} a_k|$ konvergent ist. Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 49.

Aufgabe 51. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n \leqslant b_n$ gelten, dann folgt $a \leqslant b$.

b) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $a_n \leqslant b_n$ gelten, dann folgt $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

Aufgabe 52. Sei $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent. Zeigen Sie, dass $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ gilt. Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 50 und Aufgabe 51 a).

Aufgabe 53. Zeigen Sie: Wenn $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent ist, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent. Hinweis: Beweisen Sie durch Widerspruch. Nehmen Sie an, dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent ist und nutzen Sie Satz 5.8.a.

Aufgabe 54. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 5.13, dass folgende Reihen konvergent sind:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{2^k}$;

b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 \frac{1}{3^k}$;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 + 1)x^{2k}$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$.

Aufgabe 55. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 5.8 und Satz 5.13 dass folgende Reihen konvergent sind:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin(k) \frac{1}{2^k}$;

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sin(k)+2} \frac{1}{2^k}$;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k + \sin(k))x^k$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$.

Aufgabe 56. Zeigen Sie:

a) $\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) $\sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} \geqslant 1 + \frac{k}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Hinweis: Nutzen Sie a) und Induktion.

c) $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{2^k} \frac{1}{n} = \infty$.