

Übungsblatt 6

Besprechung am 30/11/2023

Aufgabe 41. Zeigen Sie, dass $f(x) = |x|^3$ stetig in \mathbb{R} ist.

Aufgabe 42. Sei $a, b \in \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass $f(x) := x$ stetig in (a, b) ist.
- Zeigen Sie, dass $f(x) := x^k$ stetig in (a, b) ist.
- Zeigen Sie, dass $f(x) := c(n)x^n + c(n-1)x^{n-1} + \dots + c(0)x^0$ stetig in (a, b) ist. Hier $c(i) \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0, \dots, n\}$.

Aufgabe 43. Zeigen Sie, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ und $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = a$ dann $\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = b$. Hinweis: Nach Definition 4.3 gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a + h_n) = b$ für jede Nullfolge h_n gilt.

Aufgabe 44. Nutzen Sie das vorherige Beispiel, um folgende Aussage zu zeigen: Wenn $g : (a, b) \rightarrow (c, d)$ und $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind, dann ist $f \circ g$ stetig in (a, b) .

Aufgabe 45. Zeigen Sie

- Zeigen Sie, dass $|\sin(x)| \leq |x|$, für alle $x \in (-\pi, \pi)$. Hinweis: Zeichnen Sie ein Bild im Einheitskreis.
- Zeigen Sie mit Hilfe der Grenzwertdefinition dass $\sin(x)$ stetig in 0 ist. Hinweis: Nutzen Sie a).
- Zeigen Sie, dass $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$ stetig in 0 ist.
- Zeigen Sie, dass $\sin(x)$ stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$ ist. Hinweis: Nutzen Sie die Relation $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$ zusammen mit b) und c) .

Aufgabe 46. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 4.14 dass

- $\sin(x) + \frac{x}{1-x}$ stetig in $(0, 1)$ ist.
- $\frac{\cos(x)}{x+1} x^2$ stetig in $(-1, 1)$ ist.

Aufgabe 47. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 4.19 dass

- $\sin(x) - x^2 + 1$ mindestens zwei Nullstellen in $[-1, 2]$ hat.
- $x^3 + 5x + 1$ mindestens zwei Nullstellen in $[-1, 2]$ hat.
- $x^5 - x + 4x^2 - 3$ mindestens zwei Nullstellen in $[-2, 1]$ hat.

Aufgabe 48. Zeigen Sie, dass $\frac{1}{x-1}$ nicht stetig in 1 ist.