Übungsblatt 5

Besprechung am **23/11/2023**

Aufgabe 33. Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}$ zwei beschränkte Folgen.

a) Zeigen Sie: Es gilt
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n.$$

b) Folgern Sie aus Punkt a):
$$\limsup_{k\to\infty}(a_k+b_k) \leqslant \limsup_{k\to\infty} a_k + \limsup_{k\to\infty} b_k.$$

Aufgabe 34. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge. Zeigen Sie: Wenn $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert, dann existiert auch $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 35. Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ für

a) $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$,

b) $a_n = \sin(\frac{n\pi}{2}) + \cos(\frac{n\pi}{2})$

c) $a_n = \begin{cases} 2^{1/n}, & n \leqslant 10^{10} \\ \frac{n^2+1}{(2n+1)^2}, & n > 10^{10} \text{ gerade,} \\ \frac{\sqrt{n+1}}{n}, & n > 10^{10} \text{ ungerade.} \end{cases}$

Aufgabe 36. Zeigen Sie: Eine Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn sie genau einen Häufungspunkt hat.

Aufgabe 37. Wir definieren eine Folge $(a_j)_{j\geqslant 1}$ durch
$$a_j = \frac{j}{10^{k+1}}, \quad 10^k \leqslant j < 10^{k+1}.$$
Bestimmen Sie die Häufungspunkte von $(a_j)_{j\geqslant 1}$.

Aufgabe 38. Finden Sie jeweils ein Beispiel oder zeigen Sie, warum so eine Folge nicht existieren kann.

a) Eine unbeschränkte Folge mit genau zwei Häufungspunkten.

b) Eine unbeschränkte Folge ohne Häufungspunkt.

c) Eine konvergente Folge mit genau zwei Häufungspunkten.

d) Eine konvergente Folge ohne Häufungspunkt.

Aufgabe 39. Sind folgende Funktionen $\mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ stetig in 0? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$

b) $x \mapsto \frac{1}{x^2}$

c) $x \mapsto \begin{cases} x & x < 0, \\ x^3, & x > 0. \end{cases}$

d) $x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Aufgabe 40. Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion

$$|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$$

stetig ist.