Übungsblatt 4

Besprechung am **16/11/2023**

Aufgabe 25. Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ sei gegeben durch $a_n = q^n$ für $q \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen über den Grenzwert dieser Folge:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, falls $0 \leqslant |q| < 1$.

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, falls $q = 1$.

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls $q > 1$.

d) Für $q < -1$ ist die Folge divergent, wobei es keinen uneigentlichen Grenzwert gibt.

Aufgabe 26. Vervollständigen Sie Beispiel 3.21 aus der Vorlesung, indem Sie zeigen:

a) Die Folge $\big((1 + 1/n)^n\big)_{n\geqslant 1}$ ist monoton wachsend.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k.$$

c) Für alle n gilt

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} < \frac{1}{1-1/2}.$$

Aufgabe 27. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n$,

b) $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^n$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an das zuvor erwähnte Beispiel 3.21 aus der Vorlesung.

Für die beiden folgenden Aufgaben bezeichnen wir mit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ die Fibonacci-Folge, definiert durch

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \quad \text{für } n \geqslant 3.$$

Betrachten Sie nun die Folgen $(q_n)_{n\geqslant 1}$ und $(r_n)_{n\geqslant 1}$, welche durch

$$q_n = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}, \qquad r_n = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}$$

definiert sind.

Aufgabe 28. a) Zeigen Sie: $(q_n)_{n\geqslant 1}$ ist monoton steigend, und $(r_n)_{n\geqslant 1}$ ist monoton fallend.

b) Zeigen Sie, dass $1 \leqslant q_j \leqslant 2$ und $1 \leqslant r_j \leqslant 2$ für jedes $j \geqslant 1$ gelten. Folgern Sie daraus, dass $(q_n)_{n\geqslant 1}$ und $(r_n)_{n\geqslant 1}$ konvergieren.

Hinweis: Unter Umständen kann es hilfreich sein, Aufgabe 29 a) vorzuziehen.

Aufgabe 29. Zeigen Sie weiters:

a) Es gilt $q_n = 1 + 1/r_{n-1}$ und $r_n = 1 + 1/q_n$ für jedes $n \geqslant 1$.

b) Seien $q = \lim_{n\to\infty} q_n$ und $r = \lim_{n\to\infty} r_n$. Dann gilt $q = 1 + 1/r$ und $r = 1 + 1/q$.

c) Es folgt $q = r$. Was können Sie daraus über das Konvergenzverhalten von $(a_{n+1}/a_n)_{n\geqslant 1}$ schließen?

Die nächsten beiden Aufgaben vervollständigen den Beweis von Satz 3.25 aus der Vorlesung.

Aufgabe 30. Erster Teil des Beweises: Sei T eine obere Schranke von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, und sei die Folge $(T_n)_{n\geqslant 1}$ definiert als

$$T_n = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Zeigen Sie, dass dann $T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T$ gilt.

Aufgabe 31. Zweiter Teil des Beweises: Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} T_n = T_0$ existiert und dass $T_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ gilt.

Aufgabe 32. Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ für

a) $a_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$, b) $a_n = \frac{n}{\sqrt{10+n}}$, c) $a_n = (-1)^n/n$.