Übungsblatt 3

Besprechung am **9.11.2023**

Aufgabe 17 Beweisen Sie Lemma 1.41: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in [-1, \infty)$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Zeigen Sie weiter: Gleichheit gilt in obiger Ungleichung genau dann, wenn $n \in \{0, 1\}$ oder $x = 0$.

Aufgabe 18 Beweisen Sie den Satz des Pythagoras:

> Seien c die Länge der Hypothenuse und a,b die Längen der Katheten eines ebenen rechtwinkeligen Dreiecks. Dann gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.

Aufgabe 19 Berechnen Sie die exakten Werte von

$$\text{a) } \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \qquad \text{b) } \cos\left(\tan^{-1}(\tfrac{1}{2})\right) \qquad \text{c) } \sin\left(\cos^{-1}(\tfrac{2}{3})\right).$$

Aufgabe 20 Im Beispiel 3.11, 4. Unterpunkt, wird $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+2}$ berechnet. Studieren Sie diese Rechnung und beweisen Sie danach:

> Es sei $c_n = \frac{p_n}{q_n}$ eine rationale Folge, also ein Quotient zweier polynomialer Folgen
>
> $$p_n = \sum_{j=0}^{r} a_j n^j \text{ und } q_n = \sum_{k=0}^{s} b_k n^k$$
>
> wobei $a_j, b_k \in \mathbb{R}$ und a_r sowie b_s je ungleich 0 sind.[1] Dann ist
>
> $$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=0}^{r} a_j n^j}{\sum_{k=0}^{s} b_k n^k} = \begin{cases} 0 & \text{für } r < s \\ \frac{a_r}{b_s} & \ldots\ r = s \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_r}{b_s}\right) \cdot\ \infty & \ldots\ r > s. \end{cases}$$

Aufgabe 21 Beweisen Sie Satz 3.10.2 und .3:

> Seien (a_n) und (b_n) Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:
>
> - (λa_n) ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda a$ und
> - $(a_n b_n)$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$.

Aufgabe 22 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{16n+1}}$

b) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1-n^2}{1-n^3}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

---

[1] Demnach hat p_n den Grad r und den Leitkoeffizienten a_r.

Aufgabe 23 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{4n^2-5n-1}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-n+1}{-5n^3+5n^2+4n-1}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(4n - \frac{(2n-1)^2}{n}\right)$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Aufgabe 24 Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.