Übungsblatt 2

Besprechung am **19.10.2023**

Aufgabe 9 Beweisen Sie Satz 1.22:

> Jede rationale Zahl $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ läßt sich als Dezimalzahl mit endlich vielen Ziffern oder als Periode schreiben. Die Periodenlänge kann dabei so gewählt werden, dass sie kleiner als n ist.

Aufgabe 10

a) Es seien A und B abzählbare Mengen. Zeigen Sie, dass dann auch die Vereinigung $A \cup B$ abzählbar ist.

b) Schließen Sie aus Teil a) dieser Aufgabe, dass die Vereinigung endlich vieler abzählbarer Mengen abzählbar sein muß.

c) Überlegen Sie ein Argument, mit dem Sie die analoge Frage für abzählbar viele Mengen entscheiden könnten, also: Ist der Satz

Wenn A_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Menge ist, dann ist $\bigcup_n A_n$ abzählbar.

wahr oder falsch?

Aufgabe 11 Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

b) $g\colon (-\infty, 0] \to [1, \infty),\ x \mapsto x^2 + 1$

c) $h\colon [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$

Aufgabe 12 Es seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Funktionen. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr sind, i.e., geben Sie - im affirmativen Fall - einen Beweis, und im anderen Fall ein Gegenbeispiel.

a) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

b) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist g injektiv.

Aufgabe 13 Ersetzen Sie in Aufgabe 12 das Wort ‘injektiv’ - überall, wo es vorkommt - durch ‘surjektiv’ und entscheiden Sie die entstehenden Aussagen.

Aufgabe 14 Es seien A, B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

a) f ist injektiv.

b) Für jede Menge X und für je zwei Abbildungen $h, k\colon X \to A$ gilt: $f \circ h = f \circ k \Rightarrow h = k$.

Aufgabe 15 Es seien A, B Mengen und $f\colon A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

a) f ist surjektiv.

b) Für jede Menge Y und für je zwei Abbildungen $h, k\colon B \to Y$ gilt: $h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$.

Aufgabe 16 Zeigen Sie die Gültigkeit der Aussagen in Lemma 1.37:

Sei $\mathbb{K}$ mit $+, \cdot$ und $\leq$ ein geordneter Körper. Dann gilt für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$

a) $a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$;

b) $a \leq b \wedge c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$;

c) $a \neq 0 \Rightarrow (-a < 0 < a \vee a < 0 < -a)$;

d) $a \leq b \wedge c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$;

e) $0 \leq a^2$;

f) $a > b > 0 \Rightarrow a^2 > b^2$.