Übungsblatt 1

Besprechung am **12.10.2023**

Aufgabe 1 Es sei $x \neq 1$. Beweisen Sie die Gültigkeit der Formel

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

a) mit Induktion;

b) durch direktes Ausrechnen.

Aufgabe 2 Beweisen Sie die folgenden Regeln für das Rechnen in einem Körper K:

a) Die Elemente 0 und 1 in K sind eindeutig bestimmt; die Null durch ihr Verhalten bezüglich der Addition, die Eins bzgl. der Multiplikation.

b) Das additive Inverse von $a \in K$ ist eindeutig bestimmt.[1]

c) Für $a \neq 0$ ist das multiplikative Inverse eindeutig bestimmt.[2]

Aufgabe 3 Sei K ein Körper und $a, b \in K$ sowie $c, d \in K \setminus \{0\}$. Der Ausdruck $\frac{a}{c}$ steht in K als eine alternative Schreibweise für $a \cdot c^{-1}$.

Zeigen Sie die folgenden Rechenregeln. Gehen Sie dabei wie in der Vorlesung vor, indem Sie nur ein Axiom pro Schritt anwenden.

a) $\frac{1}{c} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{c \cdot d}$;

b) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad+bc}{cd}$;

c) $\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}$.

Aufgabe 4 Im Skriptum wird gezeigt, dass es keine rationale Zahl r gibt, deren Quadrat $= 2$ ist, kurz, die Quadratwurzel aus 2 ist nicht rational.

Zeigen Sie, in ähnlicher Weise:

> Die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl ist entweder selbst eine natürliche Zahl, oder aber irrational.[3]

Aufgabe 5 Im Skriptum, Beispiel 1.6. finden Sie die Funktion

$$+ \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right) \mapsto \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}. \tag{1}$$

Das ist die Definition der Addition rationaler Zahlen, wie sie in der Konstruktion von $\mathbb{Q}$ aus dem Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen gemacht wird. Dabei sind $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ beliebige ganze Zahlen, und $q_1, q_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Nun ist die Darstellung rationaler Zahlen als Bruch ganzer Zahlen nicht eindeutig, z.B. ist $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. Man kann sie eindeutig machen, indem man immer voraussetzt, dass in der Darstellung $r = \frac{p}{q}$, die ganzen Zahlen p und q teilerfremd sind, sodaß der Bruch $\frac{4}{6}$ bei der Addition formal gar nicht zugelassen wäre. Das würde das Rechnen in $\mathbb{Q}$ natürlich komplizieren.

---

[1] Daher kann man es mit einem Funktionssymbol versehen: $-a$.

[2] Wie in b). Hier schreibt man a^{-1}.

[3] Der Nachweis ist ganz leicht, wenn man bedenkt, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige Darstellung als ein Produkt von Primzahlen hat.

a) Zeigen Sie, dass dieses Problem nicht wirklich auftritt, d.h., das Ergebnis der Addition in (1) ist unabhängig von der verwendeten Darstellung als Brüche ganzer Zahlen.

   Überlegen Sie auch, wie das Verhältnis von Formel (1) und der Rechenregel in Aufgabe 3.b) zu sehen ist.

b) Zeigen Sie, dass dieselbe Unabhängigkeitsaussage auch auf die in 1.6 formulierte Multiplikation rationaler Zahlen zutrifft und erklären Sie den Zusammenhang mit 3.c).

Aufgabe 6 Betrachten Sie die Menge $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gemeinsam mit den beiden binären Operationen $+\colon A \times A \to A$ und $*\colon A \times A \to A$, die in den folgenden Tabellen erklärt sind.

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$*$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Die Elemente der Menge A sind eher als Symbole zu sehen denn als natürliche Zahlen. Das Ergebnis von z.B. $2 * 3 = *(2, 3)$ findet man im Schnittfeld von Zeile 2 und Spalte 3, es ist also 1.

Weisen Sie nach, dass A mit den beiden Operationen $+$ und $*$ die in Definition 1.9. formulierten Axiome erfüllt, dass $(A, +, *)$ also ein Körper ist.

Hinweis: Überlegen Sie, wie ein neutrales Element in so einer Tabelle identifiziert werden kann, wie man ein Inverses zu einem Element findet, und woran man die Kommutativität sofort erkennt.

Um mit unseren Mitteln das Assoziativgesetz der Addition nachzuweisen müßte man jede Instanz der Formel $(a + b) + c = a + (b + c)$ auswerten. Zwar ist das machbar, es genügt uns hier aber, wenn Sie eine Instanz Ihrer Wahl behandeln. Dasselbe gelte für die multiplikative Assoziativität.

Aufgabe 7 Eine oftmals diskutierte Frage lautet:

> Ist die Zahl $0.\overline{9}$, also $0.99999\ldots$ gleich 1, oder ist sie vielleicht doch ein ganz klein wenig kleiner.

a) Entscheiden Sie diese Frage aus mathematischer Sicht.

b) Stellen Sie die Zahl $3.73218\overline{8827}$ als Bruch ganzer Zahlen dar.

Aufgabe 8 Beweisen Sie Satz 1.23:

> Jede periodische Dezimalzahl läßt sich als Bruch ganzer Zahlen schreiben.