Ersatzklausur

26. Februar 2024

Name:
Matrikelnummer:
(**Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf jedes extra Blatt.**)

Aufgabe 1. Kreuzen Sie richtig an:

Jede reelle Zahl kann mit einem Algorithmus berechnet werden.	☐wahr Xfalsch
Ist $(a_n)_{n\geq 1}$ nach oben beschränkt, so ist $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent.	☐wahr Xfalsch
Wenn f eine Potenzreihendarstellung hat, ist f beliebig oft differenzierbar.	Xwahr ☐falsch
Ist $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$ für eine reellwertige Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergent, dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.	Xwahr ☐falsch
Wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f in einem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$ Riemann-integrierbar.	Xwahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

a) Definieren Sie: (a_n) besitzt einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.
b) Definieren Sie mit Hilfe von Nullfolgen: f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ (d.h. $\lim_{x\to x_0} f(x) = M$).
c) Definieren Sie mit Hilfe von b): f ist stetig in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \dfrac{e^n + 2e^{n^2}}{e^{n^2}}$;
b) $\lim_{x\to 0} f(x)$ für die Funktion $f(x) = \dfrac{2x + x^2 + 2x^5}{e^x - 1}$.

Begründen Sie Ihre Rechenschritte; für a) dürfen Sie die Grenzwertsätze benutzen.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen oder widerlegen Sie (mit Angabe eines Gegenbeispiels):

a) Wenn f und g stetig in $\mathbb{R}$ sind, dann ist auch $f + 2\,g$ stetig in $\mathbb{R}$.
b) Wenn das Produkt $f \cdot f$ stetig in $\mathbb{R}$ ist, dann ist auch f stetig in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n x^n$

Geben Sie alle Rechenschritte an (das reine Ergebnis wird nicht als Lösung akzeptiert).

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Wann existiert für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$ eine andere Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n$, so dass

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\, x^n\right) = 1$$

gilt? Geben Sie in diesem Fall einen Algorithmus an, der mit der Eingabe $f_0, \ldots, f_n$ den Koeffizienten g_n berechnet.

Aufgabe 7. (6 Punkte)

Berechnen Sie die Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:

a) $\int \sin(x)^2\, dx$

[Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration und $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$.]

b) $\int \sin(x) e^{2\cos(x)}\, dx$