Vorlesung Analysis für Informatiker **Wintersemester 2023**

Klausur

5. Februar 2024

Name:
Matrikelnummer:
(**Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf jedes extra Blatt.**)

Aufgabe 1. (5 Punkte)

Kreuzen Sie richtig an:

Eine nach oben beschränkte Folge hat ein Supremum.	x wahr ☐falsch
$\sqrt{11}$ ist irrational.	x wahr ☐falsch
Die Menge der Funktionen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, 9\}$ ist abzählbar.	☐wahr x falsch
Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist auch $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergent.	x wahr ☐falsch
Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n$ Potenzreihen mit $f(x) \cdot g(x) = 1$. Dann gilt $f_0 \cdot g_0 = 1$.	x wahr ☐falsch

Aufgabe 2. (6 Punkte)

a) Definieren Sie: $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist konvergent.

b) Seien $(a_n)_{\geq 1}, (b_n)_{\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Zeigen Sie, dass auch $(\sqrt{|a_n - b_n|})_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge ist. Sie dürfen die Grenzwertsätze benutzen, wenn Sie diese richtig anwenden.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Definieren Sie mit Hilfe von Nullfolgen:

a) f besitzt einen Grenzwert $M \in \mathbb{R}$ in x_0.

b) f ist differenzierbar in x_0.

c) f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Zeigen Sie mit Hilfe von Nullfolgen oder widerlegen Sie (mit Angabe eines Gegenbeispiels):

a) Wenn f und g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ sind, dann ist auch $f + g$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

b) Wenn $f \cdot f$ differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist, dann ist auch f differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5. (6 Punkte)

Berechnen Sie die Ableitungsfunktionen und vereinfachen Sie ihr Ergebnis so weit wie möglich für folgende Funktionen:

a) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$

b) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x^2)^{x^2}$
(Hinweis: $x^x = e^{x \ln(x)}$)

Aufgabe 6. (6 Punkte)
Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n^{100} + 2n + 1}{4n^{100} + 3} \right)^n x^n$

Hinweis: Verwenden Sie z.B. das Quotienten- oder Wurzelkriterium.

Aufgabe 7. (6 Punkte)
Berechnen Sie die Stammfunktionen von den folgenden Funktionen:

a) $\displaystyle\int x^2 \cos(x)\, dx$ b) $\displaystyle\int (x^2 - 1) \sin(x^3 - 3x)\, dx.$

Geben Sie alle Rechenschritte an (das reine Ergebnis wird nicht als Lösung akzeptiert).