Übungsblatt 9

Besprechung am **12/01/2023**

Aufgabe 1 Zeigen Sie das *Minorantenkriterium für Reihen:*

> *Seien $(a_k)_{k\geq 1}$ und $(b_k)_{k\geq 1}$ Folgen in $\mathbb{R}$ so, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dass $0 \leq a_k \leq b_k$. Wenn dann $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert, dann divergiert auch $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.*

Hinweis: *Sie können die zu zeigende Aussage mittels elementarer Logik auf das Majorantenkriterium zurückführen, oder aber, analog zu dessen Beweis, direkt beweisen.*

Aufgabe 2 Wir sagen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **absolut konvergiert**, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Zeigen Sie: Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.[1] Das bedeutet:

> Ist $\sum_{k=1}^{k} |a_k|$ konvergent, dann auch $\sum_{k=1}^{k} a_k$, und es gilt $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+1}{3k(k+1)} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k)}{k} \qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2k^3+1} \qquad d)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Aufgabe 4 Berechnen Sie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2-1}$.

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass sich das Konvergenzverhalten einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht ändert, wenn die sie definierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an endlich vielen Stellen abgeändert wird.[2]

Aufgabe 6 Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(n - \frac{n^2+n+1}{n}\right) \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}$$

Aufgabe 7 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(n+2)\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln(n))^n}$$

Aufgabe 8 Beweisen Sie Satz 6.9:

> Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist
>
> $$f\colon (-r, r) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
>
> eine stetige Funktion.

---

[1] **Achtung:** Die Grenzwerte der beiden Reihen - also ihre "Summen" - sind im allgemeinen verschieden!

[2] **Und wieder:** Die Limiten der zur Diskussion stehenden Reihen können verschieden sein.