Übungsblatt 8

Besprechung am **15/12/2022**

Aufgabe 1 Sei $x_0 \in (a,b)$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ und $D = (a,b)$ oder $D = (a,b) \setminus \{x_0\}$. Weiters sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $M \in \mathbb{R}$. **Zeigen Sie:**

$M = \lim_{x \to x_0} f(x)$ genau dann, wenn die Funktion

$$\widetilde{f}\colon D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \dots\ x \neq x_0 \\ M & \dots\ x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 ist.

Aufgabe 2 Aus der Vorlesung (Satz 4.17) wissen wir, dass die Komposition stetiger Funktionen stetig ist. In Übungsblatt 7, Aufgabe 3 haben wir die lokale Version dieses Sachverhalts behandelt.

Konstruieren Sie ein Beispiel, aus dem zu ersehen ist, dass die Umkehrung dieser Sätze nicht zwingend gelten muß. Gesucht sind also Funktionen

$$f\colon (a,b) \longrightarrow (c,d) \text{ und } g\colon (c,d) \longrightarrow \mathbb{R}$$

die so beschaffen sind, dass die Komposition $g \circ f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(f(x))$ in einem Punkt $x \in (a,b)$ stetig ist, aber

a) die Funktion f nicht stetig in x, oder

b) die Funktion g nicht stetig in $f(x)$ ist.

Gibt es eine Möglichkeit die Aufgabe zu lösen, wenn das Wort ‘oder’ durch ‘und’ ersetzt wird?

Aufgabe 3 Es sei f die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + n^2 x}.$$

Bestimmen Sie $\lim_{x \to 0} f(x)$.

Aufgabe 4 Es sei

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{x^n - 1}{x^n + 1} \right)^2.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?

b) Bestimmen Sie die Menge der Stetigkeitsstellen von f, also $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig in } x\}$.

c) Kann die Funktion f so fortgesetzt werden, dass sie in jedem Punkte $x \in \mathbb{R}$ stetig ist?

Aufgabe 5 Es seien f und g zwei stetige Funktionen $(a,b) \to \mathbb{R}$ ($a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion

$$\max(f,g)\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$$

stetig ist. Leiten Sie daraus ab, dass genauso die Funktion $\min(f,g)$ stetig sein muß.

Sie können mit Folgen oder ε/δ arbeiten, oder aber Sie folgen dem
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\forall_{a,b \in \mathbb{R}}\ \max\{a,b\} = \frac{1}{2}\big(a + b + |a - b|\big)$.

Aufgabe 6 Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und

$$f\Big(\frac{p}{q}\Big) = \frac{1}{q} \text{ für } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ in reduzierter Form mit } q > 0.$$

Zeigen Sie: $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig in } x\} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Bemerkung: 'Reduzierte Form' bedeutet, dass die ganzen Zahlen p, q teilerfremd sind. Zudem sollen negative Brüche mit positivem Nenner dargestellt werden.

Hinweis: Betrachten Sie für festes $q \in \mathbb{N}$ die Menge aller Brüche $\frac{p}{q}$ und bestimmen Sie für irrationales x die Distanz zu diesen Zahlen.

Aufgabe 7 Es seien $x_0 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Betrachten Sie die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$. Berechnen Sie $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$.

Aufgabe 8 Wie in Aufgabe 7 seien die Funktion $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ (für festes $n \in \mathbb{N}$) und ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Mit diesen Daten definieren wir die Funktion

$$\mu\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ \mu(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon}\big(F(x_0+\varepsilon) - F(x-\varepsilon)\big).$$

Berechnen Sie $\lim_{\varepsilon \to 0} \mu(\varepsilon)$.