Übungsblatt 7

Besprechung am **1/12/2022**

Aufgabe 1 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ stetig ist.

Aufgabe 2 Beweisen Sie Satz 4.13:

> Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und sei $x \in (a,b)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.
>
> a) $\lim_{\zeta \to x} f(\zeta) = f(x)$ (d.h., f ist stetig in x).
>
> b) $\forall_{(x_n)_{n\geq 1} \in (a,b)^{\mathbb{N}}} \big(\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)\big)$.
>
> c) $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{\zeta\in(a,b)} \big(|\zeta - x| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(x)| < \varepsilon\big)$.

Aufgabe 3 Beweisen Sie die folgende Variante von Satz 4.17:

> Seien $f\colon (a,b) \to (c,d)$ und $g\colon (c,d) \to \mathbb{R}$ Funktionen und $x \in (a,b)$. Dann gilt:
>
> $$f \text{ stetig in } x \text{ und g stetig in } f(x) \Rightarrow g \circ f \text{ stetig in } x.$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ in welchen die Funktion $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2 x}$ stetig ist.

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$w\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ w(x) = \begin{cases} 1 & \dots\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \dots\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in keinem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Aufgabe 6

a) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die an genau einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ unstetig und in jedem Punkt $x \neq x_0$ stetig ist.

b) Finden Sie eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die an genau einer Stelle $x_1 \in \mathbb{R}$ stetig, sonst überall unstetig ist.

   Hinweis: Sie können z.B. mit der Zerlegung $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ arbeiten.

Aufgabe 7 Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, f(xy) = x\, f(y).$$

Zeigen Sie, dass f global stetig ist (also f ist stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 8 Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe die Eigenschaft

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Weiters sei f stetig in $x = 0$. Zeigen Sie, dass f dann global stetig sein muss.