Übungsblatt 6

Besprechung am **17/11/2022**

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n}.$$

Aufgabe 2. Sei $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Überprüfen Sie ob $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert und finden Sie den Grenzwert, falls dieser existiert.

Die nächsten beiden Aufgaben vervollständigen den Beweis von Satz 3.25 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3. Erster Teil des Beweises: Sei T eine obere Schranke von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, und sei die Folge $(T_n)_{n\geqslant 1}$ definiert als

$$T_n = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Zeigen Sie, dass dann $T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T$.

Aufgabe 4. Zweiter Teil des Beweises: Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} T_n = T_0$ existiert und dass $T_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ gilt.

Aufgabe 5. Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ für

a) $a_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$, b) $b_n = \frac{n}{\sqrt{10+n}}$, c) $c_n = (-1)^n/n$.

Aufgabe 6. Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}$ zwei beschränkte Folgen. Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n + b_n) \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n.$$

b) Es gilt

$$\limsup_{k\to\infty}(a_k + b_k) \leqslant \limsup_{k\to\infty} a_k + \limsup_{k\to\infty} b_k.$$

Aufgabe 7. Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge. Zeigen Sie wenn $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert, dann existiert auch $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 8. Finden Sie jeweils ein Beispiel oder zeigen Sie, warum so eine Folge nicht existieren kann.

a) Eine unbeschränkte Folge mit genau zwei Häufungspunkten.

b) Eine unbeschränkte Folge ohne Häufungspunkt.

c) Eine konvergente Folge mit genau zwei Häufungspunkten.

d) Eine konvergente Folge ohne Häufungspunkt.