Übungsblatt 5

Besprechung am **10/11/2022**

Aufgabe 1. Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}, (c_n)_{n\geqslant 1}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$. Sei außerdem $(b_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge mit $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ gilt.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die jeweiligen Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{4n^2-5n-1}$,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-n+1}{5n^3+5n^2+5n-1}$,

c) $\lim_{n\to\infty} \left(4n - \frac{(2n-1)^2}{n}\right)$,

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die jeweiligen Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n}$,

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die jeweiligen Grenzwerte.

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{16n+1}}$,

b) $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{1-n^2}{1-n^3}$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

Aufgabe 5. Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit Grenzwert a, also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass dann ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n| > \frac{1}{2}|a|$ für alle $n \geqslant N$.

Aufgabe 6. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist gegeben mit $a_n = q^n$, wobei $q \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen über den Grenzwert dieser Folge:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, falls $0 \leq |q| < 1$.

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, falls $q = 1$.

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls $q > 1$.

d) Für $q < -1$ ist die Folge divergent, wobei es keinen uneigentlichen Grenzwert gibt.

Aufgabe 7. Seien $(a_n)_{n\geqslant 1}$ und $(b_n)_{n\geqslant 1}$ zwei konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und mit $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Beweisen Sie die Satz 3.10.3 aus der Vorlesung, d.h.,

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Aufgabe 8. Vervollständigen Sie Beispiel 3.21 aus der Vorlesung, indem Sie zeigen:

a) Die Folge $\big((1+1/n)^n\big)_{n\geqslant 1}$ ist monoton wachsend.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k.$$

c) Für alle n gilt

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} < \frac{1}{1-1/2}.$$