Übungsblatt 3

Besprechung am **27/10/2022**

Aufgabe 1. Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort! Bestimmen Sie für die bijektiven Funktionen ihre Umkehrfunktion.

a) $f\colon (-1,1) \to (0,\infty), x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$

b) $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, x \mapsto 3x-1$

c) $h_1\colon \mathbb{R} \to [-4,\infty), x \mapsto x^2-4$

d) $h_2\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2-4$

Aufgabe 2 (Lemma 1.37)**.** Sei $\mathbb{K}$ mit $+, \cdot$ und $\leqslant$ ein geordneter Körper. Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

a) $a \leq b \wedge c \geq 0 \implies ac \leq bc$;

b) $a \leq b \wedge c \leq 0 \implies ac \geq bc$;

c) $a \neq 0 \implies (-a < 0 < a \vee a < 0 < -a)$;

d) $a > b > 0 \implies a^2 \geq b^2$.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper. Auf der Menge $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ seien die folgenden Verknüpfungen definiert:

$$(a,b) + (x,y) := (a+x, b+y) \quad (a,b) \cdot (x,y) := (ax-by, ay+bx).$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ zusammen mit diesen beiden Verknüpfungen einen Körper bildet. Sie können dazu Assoziativität, Kommutativität und Distributivität annehmen.

b) Kann $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ ein geordneter Körper sein? (Hinweis: Betrachten Sie $(0,1)^2$.)

Aufgabe 4. Sei $\mathbb{Q}[x] = \{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}$ die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten. Für $a = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$ mit $a_n \neq 0$ definieren wir $\deg(a) = n$ und $\mathrm{lc}(a) = a_n$. Als Spezialfall definieren wir $\deg(0) = -\infty$ und $\mathrm{lc}(0) = 0$. Außerdem definieren wir $P = \{a \in \mathbb{Q}[x] \mid \mathrm{lc}(a) \geqslant 0\}$. Sind $a, b \in \mathbb{Q}[x]$, schreiben wir weiterhin $a \preccurlyeq b$, falls $b - a \in P$. Zeigen Sie:

a) Für alle $a, b \in P$ sind $a + b \in P$ und $ab \in P$.

b) $\preccurlyeq$ ist eine lineare Ordnung auf $\mathbb{Q}[x]$.

Aufgabe 5. Sei $f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ und $a_0, a_n \neq 0$. Sei $q = s/t \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl mit $f(q) = 0$, wobei $s, t \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $t \neq 0$ seien. Zeigen Sie, dass s ein Teiler von a_0 und t ein Teiler von a_n ist.

Aufgabe 6. Benutzen Sie Aufgabe 5 um zu zeigen, dass die folgenden Zahlen nicht rational sind:

a) $\sqrt{p}$, wobei p eine beliebige Primzahl sei.

b) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Bestimmen Sie weiters alle rationalen Nullstellen von $32x^4 - 12x^3 - 55x^2 - 17x + 3$.

Aufgabe 7. Seien a, b berechenbar, also $a, b \in \mathbb{B}$. Zeigen Sie, dass $a + b$ und ab berechenbar sind.

Aufgabe 8. Zeigen Sie den Satz des Pythagoras (Satz 2.6 im Skript).