Übungsblatt 2

Besprechung am **20/10/2022**

Aufgabe 1. Überprüfen Sie, ob $K = \{1, 2\}$ zusammen mit den Verknüpfungen

$+$	1	2
1	1	2
2	2	1

und

$\cdot$	1	2
1	1	1
2	1	2

einen Körper bildet.

Aufgabe 2. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Mit Hilfe der Addition und der Multiplikation von K definieren wir die folgenden Operationen auf dem kartesischen Produkt $K^2 = K \times K$:

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{und} \quad (x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1).$$

Untersuchen Sie, welche der Körperaxiome für die algebraische Struktur $(K^2, \oplus, *)$ erfüllt sind.

Aufgabe 3. Beweisen Sie folgenden Satz (Satz 1.22): Jede rationale Zahl $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ lässt sich als Dezimalzahl mit endlich vielen Ziffern oder als Periode schreiben. Die Periodenlänge kann dabei so gewählt werden, dass sie kleiner als n ist.

Aufgabe 4. Beweisen Sie folgenden Satz (Satz 1.23): Jede periodische Zahl lässt sich als Bruch schreiben.

Verwenden Sie die Formel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-ak} = \frac{1}{1 - 10^{-a}}, \qquad \text{für } a \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 5.

a) Stellen Sie die rationale Zahl $\frac{739891}{9900}$ als nichtabbrechende periodische Dezimalzahl dar.

b) Dasselbe für die Zahl $\frac{132664}{4600}$.

c) Stellen Sie die periodische Dezimalzahl $124.421\overline{124}$ als Bruch dar.

d) Sind die beiden Zahlen $0.\overline{9}$ und 1 als reelle Zahlen identisch?

Aufgabe 6. Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

a) $f_1 \colon S \to \mathbb{N}, s \mapsto$ Matrikelnummer von s, wobei S die Menge der im WS 2022 an der JKU inskribierten Studierenden ist.

b) $f_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, z \mapsto |z|$.

c) $f_3\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, z \mapsto \begin{cases} 2z & z \geq 0 \\ -2z-1 & z < 0 \end{cases}.$

d) $f_4\colon \mathbb{R} \to [-1,1], x \mapsto \cos(x)$.

e) $f_5\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1], x \mapsto \sin(x)$.

Aufgabe 7. Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann injektiv, wenn für alle Funktionen $h_1, h_2\colon X \to A$ aus $f \circ h_1 = f \circ h_2$ folgt $h_1 = h_2$.

b) f ist genau dann surjektiv, wenn für alle Funktionen $g_1, g_2\colon B \to Y$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ folgt $g_1 = g_2$.

Wie üblich ist dabei $g \circ f$ definiert als diejenige Funktion, die x auf $g(f(x))$ abbildet.

Aufgabe 8. Es sei $\leq$, die in Definition 1.33 eingeführte lineare Ordnung auf den reellen Zahlen. Wir definieren auf dem kartesischen Produkt $\mathbb{R}^2$ die Ordnung $\leq_1$ wie folgt:

$$(x_1, x_2) \leq_1 (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1) \vee (x_1 = y_1 \ \wedge \ x_2 \leq y_2), \qquad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen oder widerlegen Sie: dadurch wird auf $\mathbb{R}^2$ eine lineare Totalordnung definiert, d.h., überprüfen Sie die Eigenschaften aus Lemma 1.34.