Übungsblatt 1

Besprechung am **13/10/2022**

Aufgabe 1. Sei $r \neq 1$. Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \geqslant 0$ gilt

$$\sum_{i=0}^{n} r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$;

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Aufgabe 3. Sei $x \geq -1$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Aufgabe 4. Es sein K ein Körper. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

a) Die Elemente 0 und 1 in K sind eindeutig bestimmt. (Die Null durch ihr Verhalten bezüglich der Addition, die Eins bzgl. der Multiplikation.)

b) Das additive Inverse von $a \in K$ ist eindeutig bestimmt.

c) Für $a \neq 0$ ist das multiplikative Inverse eindeutig bestimmt.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper und seien $a, b \in K$ sowie $c, d \in K$ mit $c \neq 0$ und $d \neq 0$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Körper. Gehen Sie dabei wie in der Vorlesung vor, indem Sie nur ein Axiom pro Schritt anwenden.

a) $c^{-1}d^{-1} = (cd)^{-1}$

b) $\dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{d} = \dfrac{ad+bc}{cd}$

(Hierbei ist wie üblich $\frac{a}{c} := ac^{-1}$.)

Aufgabe 6. Unter den Voraussetzungen wie in Satz 1.11 und dessen Beweis, zeigen Sie die Eigenschaften 7-9 eines Körpers für $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 7. Es sei K ein Körper und

$$K[x] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_n \in K, a_n = 0 \text{ für fast alle } n \right\}$$

die Menge der Polynome über K. Die Addition wird komponentenweise definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

und die Multiplikation durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n.$$

Zeigen Sie: die Multiplikation ist sowohl assoziativ als auch kommutativ.

Aufgabe 8. Zeigen Sie: $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.