

Übungsblatt 11

Besprechung am 20.01.2022

Aufgabe 1 Seien $f, g: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

- Ist $f'(x) = 0$ für $x \in (\alpha, \beta)$, dann ist f eine konstante Funktion.
- Gilt $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$, dann existiert eine konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + C$ für alle $x \in (\alpha, \beta)$.

Aufgabe 2 Berechnen Sie die multiplikative Inverse von

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x^2 - 4x + 4.$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie für $g(x) = 2x - x^2$ die ersten 5 Koeffizienten von $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$, sodass

$$g(f(x)) = x$$

gilt. Zeigen Sie, dass sich die Lösung(en) fortsetzen lassen, also, dass sich die Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten für alle $n \in \mathbb{N}$ lösen lassen. Ist die Lösung für $f(x)$ eindeutig?

Aufgabe 4 [Satz 7.5] Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie:

- Ist f differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$, dann ist f stetig in x_0 .
- Ist f differenzierbar in (a, b) , dann ist f stetig in (a, b) .

Aufgabe 5 [Satz 7.7(3)] Seien $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a, b) und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass f/g differenzierbar auf (a, b) ist und für $x \in (a, b)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

gilt.

Hinweis: Die Produktregel, also Satz 7.7(2), darf angewandt werden.

Aufgabe 6 Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- $f(x) = e^{\sin(x)} + \cos(x)$
- $g(x) = \arccos(x)$
- $h(x) = \tan(x)$

Aufgabe 7 Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+4}}$
- $g(x) = \frac{x \sin(x)}{1+x}$
- $h(x) = \sin(\sqrt{\exp(x)})$

Aufgabe 8 Finden Sie eine Lösung für die Differentialgleichung

$$x f''(x) + 2f'(x) + x f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad f(0) = 1 \text{ und } f'(0) = 0.$$

- Nehmen Sie (ohne Beweis) an, dass $f(x)$ durch eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dargestellt werden kann.
- Setzen Sie die Darstellung in die Formel ein und berechnen Sie Werte für a_0, a_1, \dots