Übungsblatt 9

Besprechung am **13/01/2022**

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass sich das Konvergenzverhalten einer Reihe nicht ändert, wenn eine endliche Anzahl von Summanden weggenommen oder hinzugefügt wird.

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k^2} \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+4}{4k+1}\right)^k \qquad \text{c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}$$

Aufgabe 3. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $0 < a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert.
Hinweis: betrachten Sie die geraden und ungeraden Teilfolgen der Partialsummen.

Aufgabe 4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute und bedingte Konvergenz:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+1} \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{k^2+1} \qquad \text{c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k(k+1)}$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$. Überprüfen Sie, ob der Definitionsbereich von $f\colon (-r,r) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$ um die Werte $x = -r, r$ erweitert werden kann. Wenn es zulässig ist, berechnen Sie $f(r)$ explizit.

Aufgabe 6. Wir definieren auf der Menge der Potenzreihen die Addition komponentenweise und die Multiplikation durch das Cauchy-Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}\right) x^n.$$

Mit diesen Operationen bilden die Potenzreihen einen Ring. Zeigen Sie, dass die Multiplikation assoziativ ist und bestimmen Sie das neutrale Element in der Menge der Potenzreihen bezüglich der Multiplikation.

Aufgabe 7. Wir definieren die beiden Potenzreihen s, c durch

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(2n+1)!} \qquad \text{und} \qquad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(2n)!}.$$

Bestimmen sie den Konvergenzradius dieser Reihen und des Produkts $s(x)c(x)$. Zeigen Sie, dass gilt: $s(x)c(x) = s(4x)$. Sie dürfen verwenden, dass $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 8. Beweisen Sie Satz 6.9: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist f stetig in $(-r, r)$.