Übungsblatt 9

Besprechung am **9/12/2021**

Aufgabe 1. Beweisen Sie das *Minorantenkriterium* (Satz 5.8(b)):
Seien $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.
Hinweis: folgt durch Umkehrung von Satz 5.8(a).

Aufgabe 2. Beweisen Sie Lemma 5.11: Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Konvergiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und es gilt

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

Hinweis: spalten Sie die Folge in positive und negative Teilfolgen auf.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ konvergiert.
Hinweis: betrachten Sie die geraden und ungeraden Teilfolgen der Partialsummen.

Aufgabe 5. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+1}{3k(k+1)} \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2k^3+1} \qquad \text{c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k)}{k}$$

Aufgabe 6. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

Aufgabe 7. Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2-1}.$$

Aufgabe 8. Berechnen Sie die Reihe aus Aufgabe 4 und die konvergenten Reihen aus Aufgabe 6 jeweils auf eine ausreichende Anzahl von stabilen Nachkommastellen numerisch und stellen Sie eine Vermutung über den Grenzwert auf. Um reelle Zahlen zu identifizieren (wie z.B. $\sqrt{2}, \pi, \ldots$) können Sie das Internet (z.B. Wolfram Alpha, Plouffe Inverse Symbolic Calculator) oder Computeralgebra Software zur Hilfe nehmen.