Übungsblatt 7

Besprechung am **25.11.2021**

Aufgabe 1 Zeigen Sie die Konvergenz folgender Folgen.

a) $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)}{2k}$;

b) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$.

Aufgabe 2 Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei gegeben durch die Rekursionsgleichung

$$a_1 = 3 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) \text{ für } n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist.

b) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 3 Seien $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ und $(c_n)_{n\geq 0}$ Folgen. Beweisen Sie: Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{für alle} \quad n \geq N$$

und gibt es ein $L \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Aufgabe 4 [Satz 3.25] Vervollständigen Sie den Beweis, dass jede nach oben beschränkte reelle Folge $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ein Supremum hat.

Aufgabe 5 Berechnen sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ für

a) $a_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$,

b) $b_n = n(10+n)^{-1/2}$,

c) $c_n = (-1)^n/n$.

Aufgabe 6 Es sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie, dass α ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann wenn jedes α enthaltende offene Intervall Folgenglieder a_n von beliebig großem Index n enthält, also

$$\exists \text{ streng monoton wachsende Folge } i_1 < i_2 < \cdots \text{ natürlicher Zahlen mit } \lim_{n\to\infty} a_{i_n} = \alpha$$
$$\iff \quad \forall_{u,v\in\mathbb{R}}, \forall_{N\in\mathbb{N}} (u < \alpha < v \implies \exists_{n>N} u < a_n < v).$$

Aufgabe 7 Dual zum Begriff des Supremums einer Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ bezeichnet das *Infimum* von $(a_n)_{n\geq 1}$ die größte untere Schranke $S = \inf_{n\geq 1} a_n$ genau dann wenn

- $\forall_{n\in\mathbb{N}} S \leq a_n$ und
- $\forall_T \forall_{n\in\mathbb{N}} T \leq a_n \implies T \leq S$.

Zeigen Sie, dass jede nach unten beschränkte Folge ein Infimum hat, und, dass dieses eindeutig ist.

Aufgabe 8 Berechnen Sie die Häufungspunkte der Folge

$$(a_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right),$$

die eindeutig durch $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = \frac{k_n}{\ell_n}$ mit

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{k_n+1}{\ell_n}, & k_n + 1 < \ell_n \\ \frac{1}{\ell_n+1}, & k_n + 1 = \ell_n \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ bestimmt ist. Konvergiert $(a_n)_{n\geq 1}$?