Übungsblatt 6

Besprechung am **18/11/2021**

Aufgabe 1. Beweisen Sie Satz 3.19: Jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist konvergent, d.h., es gibt ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Aufgabe 2. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist gegeben mit $a_n = q^n$, wobei $q \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie folgende Aussagen über den Grenzwert dieser Folge:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, falls $0 \leq |q| < 1$.

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, falls $q = 1$.

c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls $q > 1$.

d) Für $q < -1$ ist die Folge divergent, wobei es keinen uneigentlichen Grenzwert gibt.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Wenn die Folge $(a_n)_{n\geqslant 0}$ konvergent ist, dann besitzt sie die Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geqslant 1\ \forall m, n \geqslant N\colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Quelle: Folgen mit dieser Eigenschaft werden Cauchy-Folgen genannt.

Aufgabe 4. Vervollständigen Sie Beispiel 3.21 aus der Vorlesung, indem Sie folgendes zeigen:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(1+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{-(k-1)} < 2.$$

Aufgabe 5. Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit Grenzwert a, also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass dann ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $|a_n| > \frac{1}{2}|a|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6. Sei $(a_n)_{n\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit Grenzwert a, also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Aufgabe 7. (Arithmetisch-geometrisches Mittel) Die beiden reellen Folgen $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}$ seien rekursiv definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \quad \text{und} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{für } n \geq 1,$$

mit Anfangswerten $a_1 = 1$ und $b_1 = B > 1$. Zeigen Sie, dass beide Folgen gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Tatsächlich konvergieren diese Folgen sehr schnell. Implementieren Sie die Berechnung dieser Folgen in einer beliebigen Programmiersprache und brechen Sie ab, wenn die beiden Folgen auf einer vorgegebenen Genauigkeit übereinstimmen. Testen Sie für $B = 2$ nach wievielen Iterationen 10 Nachkommastellen stabilisiert sind. Wann sind 20 Nachkommastellen fixiert?

Aufgabe 8. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-n^2}{n^2-4}\right)^n$