Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **WS 2021/22**
`https://www.risc.jku.at/education/courses/ws2021/mathematik1/`

Übungsblatt 5

Besprechung am **11.11.2021**

Aufgabe 1 Zeigen Sie:

Jedes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$ enthält unendlich viele rationale Zahlen.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass es in (a, b) überhaupt eine rationale Zahl gibt.

Aufgabe 2 Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

a) $|x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x < \varepsilon$ und $|x| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$

b) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Aufgabe 3 Beweisen Sie:

Jede konvergente reelle Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt; d.h., $\exists_{K\in\mathbb{R}} \forall_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < K$.

Aufgabe 4 Es seien $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

a) $(|a_n|)_{n\geq 1}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

b) $(\lambda a_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(\lambda a_n) = \lambda a$.

c) $(a_n b_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$.

Aufgabe 5 Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Folge, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Zeigen Sie:

Ist $a \neq 0$ dann $\exists N \in \mathbb{N}$ sodaß $\forall n \geq N$ $a_n \neq 0$.

Bonusaufgabe: Ist $a \neq 0$ (sodaß die obige Aussage wahr ist), dann ist $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n\geq N}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

In den folgenden Aufgaben 6 bis 8 sind die Grenzwerte der angegebenen Folgen zu berechnen.

Aufgabe 6

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+2n^2+1}{6n^3+n}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \left(4n - \frac{(2n-1)^2}{n}\right)$;

c) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Aufgabe 7

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2^n}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Aufgabe 8

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{16n+1}}$

b) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1-n^2}{1-n^3}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$