Übungsblatt 3

Besprechung am **28.10.2021**

Aufgabe 1 Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

c) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto n + 1$

d) $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x - 1$

e) $h\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

Aufgabe 2 Sei $f = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ und $a_0, a_n \neq 0$. Sei $q = s/t \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl mit $f(q) = 0$, wobei $s, t \in \mathbb{Z}$ teilerfremd und $t \neq 0$ seien. Zeigen Sie, dass s ein Teiler von a_0 und t ein Teiler von a_n ist.

Aufgabe 3 Benutzen Sie Aufgabe 2 um zu zeigen, dass die folgenden Zahlen nicht rational sind:

a) $\sqrt{p}$, wobei p eine beliebige Primzahl sei.

b) Der Goldene Schnitt ϕ, wobei ϕ die positive Nullstelle von $x^2 - x - 1$ sei.

c) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Aufgabe 4 Welche der folgenden Mengen sind für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ abzählbar? Begründen Sie.

a) $\{-n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$;

b) $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$;

c) $\mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 [Lemma 1.34] Zeigen Sie, dass $\leq$ aus Definition 1.33 tatsächlich eine lineare Ordnung auf $\mathbb{R}$ definiert, also für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende Eigenschaften:

a) $a \leq a$;

b) $a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$;

c) $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$;

d) $a \leq b \vee b \leq a$.

Aufgabe 6 [Lemma 1.37] Sei $\mathbb{K}$ mit $+, \cdot$ und $\leq$ ein geordneter Körper. Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

a) $a \leq b \wedge c \geq 0 \implies ac \leq bc$;

b) $a \leq b \wedge c \leq 0 \implies ac \geq bc$;

c) $a \neq 0 \implies (-a < 0 < a \vee a < 0 < -a)$;

d) $a > b > 0 \implies a^2 \geq b^2$.

Aufgabe 7 Sei $\mathbb{K}$ ein geordneter Körper. Auf der Menge $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ seien die folgenden Verknüpfungen definiert:

$$(a, b) + (x, y) := (a + x, b + y) \quad (a, b) \cdot (x, y) := (ax - by, ay + bx).$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ zusammen mit diesen beiden Verknüpfungen einen Körper bildet. Sie können dazu Assoziativität, Kommutativität und Distributivität annehmen.

b) Kann $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ ein geordneter Körper sein? (Hinweis: Betrachten Sie $(0, 1)^2$.)

Aufgabe 8 Zeigen Sie: Es gibt genau eine Möglichkeit, den Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ zu einem geordneten Körper zu machen.
Hinweis: Finden Sie zuerst eine solche Ordnung und zeigen Sie dann, dass jede andere Ordnung, sodass $\mathbb{Q}$ ein geordneten Körper ist, gleich ist.