Übungsblatt 2

Besprechung am **21.10.2021**

Aufgabe 1 Betrachten Sie die Menge $A = \{a, b, c\}$.

Die folgenden Tabellen beschreiben zwei Operationen auf A:

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Zeigen Sie, dass A mit diesen Operationen ein Körper ist, d.h., dass $(A, +, \cdot)$ die Axiome 1. bis 9. von Definition 1.9. erfüllt.

Aufgabe 2 Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Mit Hilfe der Addition und der Multiplikation von K definieren wir die folgenden Operationen auf dem kartesischen Produkt $K^2 = K \times K$:

- $(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$,
- $(x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$.

Untersuchen Sie, welche der Körperaxiome (Definition 1.9, Axiome 1. bis 9.) für die algebraische Struktur $(K^2, \oplus, \otimes)$ erfüllt sind.

Aufgabe 3 Beweisen Sie den folgenden Satz (Satz 1.22):

> Jede rationale Zahl $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ lässt sich als Dezimalzahl mit endlich vielen Ziffern oder als Periode schreiben. Die Periodenlänge kann dabei so gewählt werden, dass sie kleiner als n ist.

Aufgabe 4 Beweisen Sie den Satz 1.23:

> Jede periodische Zahl lässt sich als Bruch schreiben.

Verwenden Sie die Formel für die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-ak} = \frac{1}{1 - 10^{-a}} \text{ (für } a \in \mathbb{N}).$$

Aufgabe 5

a) Stellen Sie sie die rationale Zahl $\frac{213159}{9900}$ als nichtabbrechende periodische Dezimalzahl dar.

b) Dasselbe für die Zahl $\frac{782628}{7350}$.

c) Stellen Sie die periodische Dezimalzahl $253.7164\overline{531}$ als Bruch dar.

d) Sind die beiden Zahlen $0.\overline{9}$ und 1 als reelle Zahlen identisch?

Aufgabe 6 Sei $r \in \mathbb{Q}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $r + \alpha \in \mathbb{Q}$;

b) $r \cdot \alpha \in \mathbb{Q}$.

> Eine Funktion $f\colon X \longrightarrow Y$ ist nach Definition *injektiv*, wenn für alle $x, y \in X$ aus $x \neq y$ folgt, dass $f(x) \neq f(y)$. Sie ist *surjektiv*, wenn es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt, mit $f(x) = y$. f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Aufgabe 7 Welche der folgenden Funktionen sind injektiv/surjektiv/bijektiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

b) $g\colon (-\infty, 0] \longrightarrow [1, \infty),\ g(x) = x^2 + 1$

c) $h\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$.

Aufgabe 8 Es seien X, Y, Z Mengen, $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Funktionen.
Die Komposition (Hintereinanderausführung) von f und g ist die Funktion $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$, definiert durch $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Beweisen Sie die fogenden Aussagen.

a) Wenn f und g beide injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Wenn f und g beide surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.