Übungsblatt 1

Besprechung am **14.10.2021**

Aufgabe 1 Es sei a eine Zahl $a \neq 1$. Zeigen Sie mittels Induktion nach n:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Aufgabe 2 Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie:

a) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$;

b) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Aufgabe 4 Es sei a eine Zahl mit $a \geq -1$. Zeigen Sie:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (1+a)^n \geq 1 + na.$$

Aufgabe 5 Es sei K ein Körper. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

a) Die Elemente 0 und 1 in K sind eindeutig bestimmt. (Die Null durch ihr Verhalten bezüglich der Addition, die Eins bez. Multiplikation.)

b) Das additive Inverse von $a \in K$ ist eindeutig bestimmt.

c) Für $a \neq 1$ ist das multiplikativ Inverse eindeutig bestimmt.

Aufgabe 6 Beweisen Sie die folgenden Regeln für das Rechnen in einem Körper K:

a) Wenn a und b beide ungleich 0 sind, dann auch ab und es gilt: $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $(b, d \neq 0)$.

c) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ $(b, d \neq 0)$.

Aufgabe 7 Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$\mathbb{K}[x] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{K},\, a_n = 0 \text{ für fast alle } n \right\}$$

die Menge der Polynome über $\mathbb{K}$. Die Addition wird komponentenweise definiert durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

und die Multiplikation durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

mit $c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.
Zeigen Sie: Die Multiplikation ist sowohl assoziativ als auch kommutativ.

Aufgabe 8 Zeigen Sie, dass die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl n entweder selbst eine natürlich Zahl ist, oder aber irrational.
Anleitung: Setzen sie $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ mit teilerfremden Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$. Falls $\frac{a}{b} \notin \mathbb{N}$, muß b eine Primzahl p als Teiler enthalten. Verwenden Sie die Primzahlen charakterisierende Eigenschaft: $p|ab \Rightarrow p|a \vee p|b$.