Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) Wintersemester 2020/21

Übungsblatt 14

Abgabe am **28/01/2021**

Aufgabe 1. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int (x^2-1)\sin x \; dx$ b) $\displaystyle\int e^{-x}\cos 2x \, dx$

Aufgabe 2. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int \arccos(x)\, dx$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Aufgabe 3. Berechnen Sie

a) $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}}$

(Hinweis: Substituieren Sie $x = \sin(\vartheta)$ bei a) und $u^2 = 4x^2+1$ bei b). – Sie dürfen ohne Beweis die Halb- und Doppelwinkelformeln benutzen.)

Aufgabe 4. Lösen Sie die lineare Differentialgleichung

$$(x+1)f'(x) = (x-1)f(x) \qquad \text{mit} \quad f(0) = \pi.$$

Anleitung: Betrachten Sie zunächst die Ableitung von $\ln(f(x))$.

Aufgabe 5. Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

(Hinweis: Schreiben Sie die Summe als Potenzreihe.)

Aufgabe 6. Die *Gamma-Funktion* ist definiert als

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}\, dx$$

für $z > 0$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\Gamma(n+1) = n!$.

Aufgabe 7. Wiebke und Fiete nehmen an einem Schlickschlittenrennen teil. Fiete führt seit einiger Zeit mit konstant 3 m. Genau 2 m von Ziel entfernt, wird er jedoch müde und verlangsamt sich anschließend proportional zum Quadrat der verbleibenden Geschwindigkeit. Nur 1 m später hat sich seine Geschwindigkeit exakt halbiert. Falls Wiebke ihre Geschwindigkeit die ganze Zeit über beibehält, wer gewinnt?