Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) Wintersemester 2020/21

Übungsblatt 12

Abgabe am **14/01/2021**

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = e^{\sin(x)} + \cos(x)$ b) $g(x) = \arccos(x)$ c) $h(x) = \tan(x)$

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+4}}$ b) $g(x) = \frac{x\sin(x)}{1+x}$ c) $h(x) = \sin\left(\sqrt{\exp(x)}\right)$

Aufgabe 3. Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in (a,b)$ differenzierbare Funktion, so ist f stetig in x_0.

Aufgabe 4. Sei $f\colon (a,b)\colon \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

a) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton steigend (das heißt, für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$ gilt $f(x) < f(y)$).

b) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton fallend (das heißt, für alle $x, y \in (a,b)$ mit $x < y$ gilt $f(x) > f(y)$).

Aufgabe 5. Eine 10 m lange Leiter lehnt an einer waagerechten Mauer. Wenn das untere Ende der Leiter mit einer Geschwindigkeit von $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ von der Mauer weg rutscht, wie schnell rutscht das obere Ende die Mauer an dem Moment hinunter, wenn das untere Ende 6 m von der Mauer entfernt ist.

Aufgabe 6. Finden Sie eine Lösung für die lineare Differentialgleichung

$$f''(x) = f(x) \qquad \text{mit} \quad f(0) = 1 \quad \text{und} \quad f'(0) = 0.$$

Anleitung: Nehmen Sie an, dass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, und benutzen Sie die Gleichung um Werte für $a_0, a_1, \ldots$ auszurechnen.

Aufgabe 7. Benutzen Sie die Potenzreihe für $1/(1-x-x^2)$ aus der Vorlesung um eine geschlossene Formel für die Fibonaccizahlen $F_0, F_1, \ldots$ herzuleiten:

a) Schreiben Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-\varphi} + \frac{B}{x-\psi}$$

mittels einer Partialbruchzerlegung.

b) Benutzen Sie die Potenzreihe für $1/(1-x)$ um die rechte Seite oben in eine Potenzreihe umzuformen.

c) Vergleichen Sie die Koeffizienten.