Übungsblatt 11

für den **07/01/2021**

Aufgabe 1 Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n, h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien r_f, r_g, r_h. Das Produkt ist definiert als

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \right) x^n.$$

Zeigen Sie unter Verwendung von Satz 6.6:

a) Für $|x| < \min(r_f, r_g)$ gilt $f(x)g(x) = g(x)f(x)$;

b) Für $|x| < \min(r_f, r_g, r_h)$ gilt $f(x)(g(x)h(x)) = (f(x)g(x))h(x)$.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n \ , \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^n \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln(n))^n}.$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie den Konvergenzradius r folgender Potenzreihen und untersuchen Sie die Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$, also insbesondere $|x| = r$. Sie können dazu die bereits bekannten unendlichen Summen verwenden.

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \ , \quad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \ , \quad f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass der Konvergenzradius von

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ , \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

tatsächlich ∞ ist.

Aufgabe 5 Stellen Sie die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2x - 8}$$

als Potenzreihe dar.
Hinweis: Wenden Sie die Formel aus Beispiel 5.3 und Satz 6.6 auf die Faktorisierung von $f(x)$ an.

Aufgabe 6 Berechnen Sie die multiplikative Inverse von

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \ , \quad x^2 - 4x + 4.$$

Hinweis: Wenden Sie die bekannte Formel aus Beispiel 5.3 für die geometrische Reihe an.

Aufgabe 7 Berechen Sie für $g(x) = 2x - x^2$ die ersten 5 Koeffizienten von $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$, sodass

$$g(f(x)) = x$$

gilt. Zeigen Sie, dass sich die Lösung(en) fortsetzen lassen, also, dass sich die Gleichungen zur Berechnung der Koeffizienten für alle $n \in \mathbb{N}$ lösen lassen. Ist die Lösung für $f(x)$ eindeutig?

Aufgabe 8 Wir betrachten die unendliche Reihe mit den Funktionen $(f_n(x) = \frac{xn^2}{(1+xn^2)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ als Summanden. Zeigen Sie, dass die Auswertung bei 0 und die Summation sich nicht vertauschen lassen, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} f_n(x) \;\neq\; \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Hinweis: Der Summenrest $\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(x)$ kann mit $n_0 = \lceil \frac{1}{\sqrt{x}} \rceil + 1$ und $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n_0}$ abgeschätzt werden.