Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **WS 2020/21**
https://www.risc.jku.at/education/courses/ws2020/mathematik1/

Übungsblatt 10

für den **17/12/2020**

Aufgabe 1 Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass alle Nullstellen der Polynomfunktion

$$f(x) := 3 + 3\sqrt{2}x - 13x^2 - \sqrt{2}x^3 + 4x^4$$

reell sind. Implementieren Sie das Bisektionsverfahren, um diese anzunähern. Als Startwerte für α, β eignen sich $-2, -1, 0, 1, 2$.

Aufgabe 2 Seien $a < \alpha < \beta < b \in \mathbb{R}$ und $g : (a, b) \to (\alpha, \beta)$ stetig. Zeigen Sie, dass g einen *Fixpunkt* hat, also $\exists \zeta \in (\alpha, \beta) : \ \zeta = g(\zeta)$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die beiden folgenden Funktionen auf Fixpunkte, und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Aussage aus Aufgabe 2:

$$f_1 : (0, 1) \to (0, 1),\ x \mapsto x^2,\ f_2 : (0, 1) \to (\frac{1}{4}, \frac{3}{4}),\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1+x}{2}, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{3-2x}{4}, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases},$$
$$f_3 : (0, 3) \to (1, 2),\ x \mapsto \sqrt{1 + x}.$$

Aufgabe 4 Beweisen Sie das *Quotientenkriterium* (Satz 5.13) für den Fall $q > 1$:
Sei $(a_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wobei $a_k \neq 0$ und nimm an, dass folgender Grenzwert existiert:

$$q := \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \in \mathbb{R}.$$

Wenn $q > 1$ gilt, dann divergiert diese.

Aufgabe 5 Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R}$ folgende Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\binom{2k}{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{k^2}}.$$

Aufgabe 6 Untersuchen Sie für $x \in \mathbb{R}$ folgende Reihen auf Konvergenz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}x^k.$$

Hinweis: In der zweiten Summe könnten die bereits berechneten Grenzwerte von Blatt 6 und Blatt 7 hilfreich sein.

Aufgabe 7 Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert, indem Sie zeigen, dass die Partialsumme $s_m = \sum_{m=1}^{n}(-1)^m a_m$ eine Cauchyfolge bilden und Aufgabe 5, Blatt 9, anwenden.