Übungsblatt 9

Besprechung am **10.12.2020**

Aufgabe 1 Beweisen Sie das *Minorantenkriterium* (Satz 5.8 (b)):

Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Anleitung: Verwenden Sie Satz 5.8 (a).

Aufgabe 2 Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der nachfolgenden Reihen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$$

Aufgabe 3 Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der nachfolgenden Reihen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \text{ für } k \geq 2$$

Aufgabe 5 Ein $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt *Cauchyfolge* wenn

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{N\in\mathbb{N}}\, \forall_{k,l\geq N}\, |a_k - a_l| < \varepsilon.$$

a) Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist.

b) Ein (zur Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ äquivalenter) Satz der Analysis lautet:

Jede Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Es gilt somit:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist konvergent (gegen irgendeinen Grenzwert $\alpha \in \mathbb{R}$) genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Zeigen Sie unter Verwendung dieses Sachverhalts:

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{n} |a_n|$ konvergent ist, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{n} a_n$.

Aufgabe 6 Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} \text{ für } k \geq 2$$

Aufgabe 7 Beweisen Sie Satz 4.13.:

Sei $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x \in (a,b)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.

a) f ist stetig in x;

b) $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (a,b)^{\mathbb{N}} \left(\lim_{n\to\infty} u_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x) \right)$;

c) $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \zeta \in (a,b) \big(|\zeta - x| < \delta \Rightarrow |f(\zeta) - f(x)| < \varepsilon \big)$.